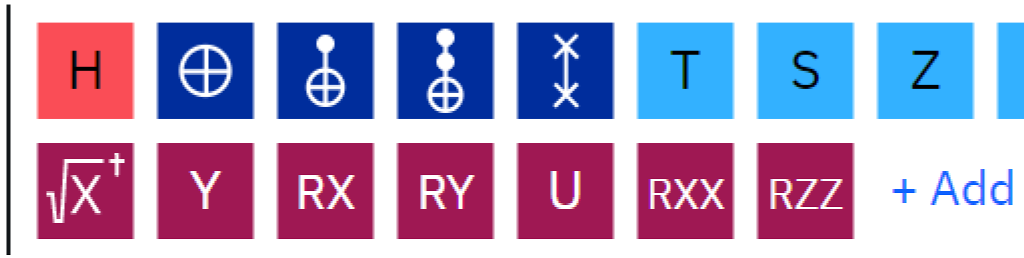
Всероссийская научно-образовательная школа
"Квантовый скачок"

Квантовые вычисления простыми словами

Торгаев С.Н.
Квантовый центр ТГУ
qtcenter.tsu.ru
Контакты:
+7 923 403 17 94
torgaev@mail.tsu.ru

Квантовые гейты

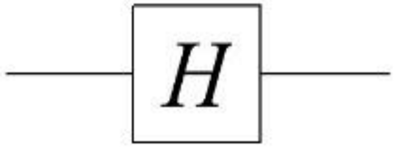
Классические дискретные цепи представляют собой совокупность проводников и набора логических гейтов. Логические гейты осуществляют преобразование информации, поступающей на их входы.
В квантовых компьютерах преобразование информации осуществляется с использованием, так называемых, квантовых гейтов.



Гейт Адамара

Чтобы создать состояния суперпозиции, используется гейт, называемый ***гейт Адамара (H)***. ***Гейт Адамара*** является одним из наиболее полезных квантовых гейтов. Он задается матрицей:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$



$$\left|\psi\right\rangle = \alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle$$

$$\left|0\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \left|1\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \left|\psi\right\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Гейт Адамара

Запишем выражения показывающие действия оператора Адамара на кубиты.

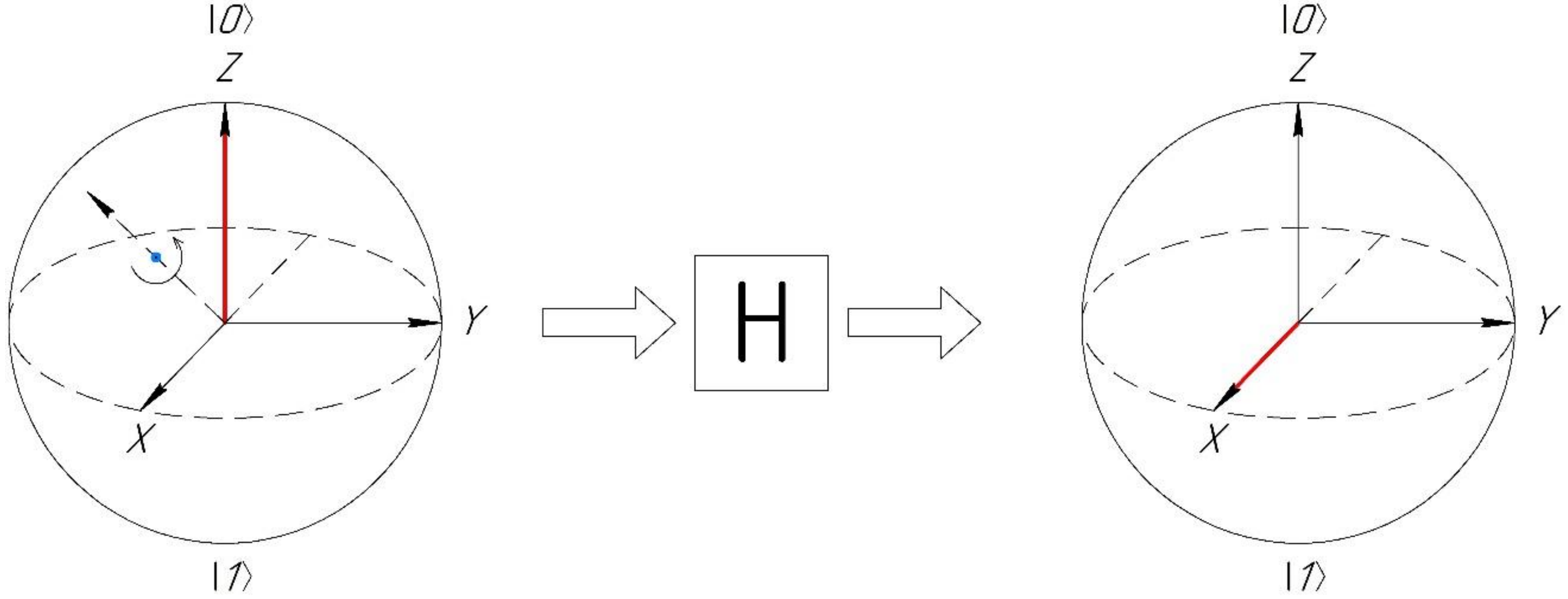
$$H\left|0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|0\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1\right\rangle$$

$$H\left|1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|0\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1\right\rangle$$

$$H\left|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}\left|0\right\rangle + \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}\left|1\right\rangle.$$

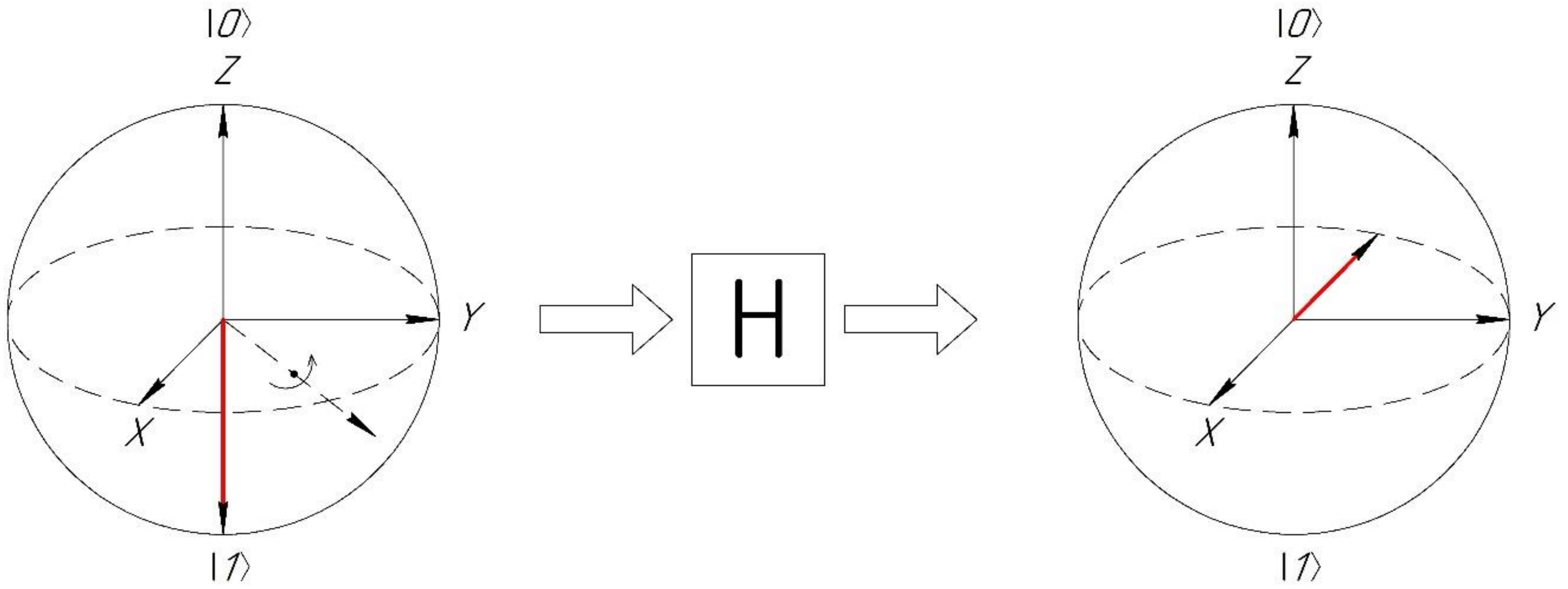
Гейт Адамара

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

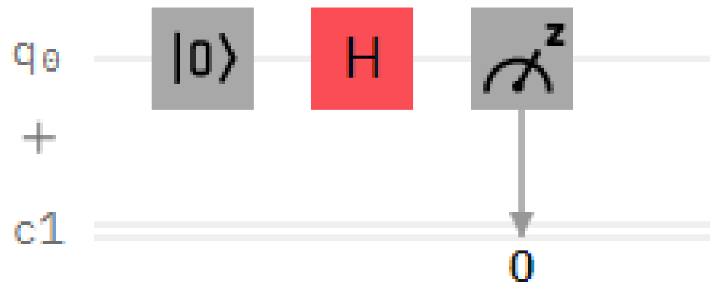


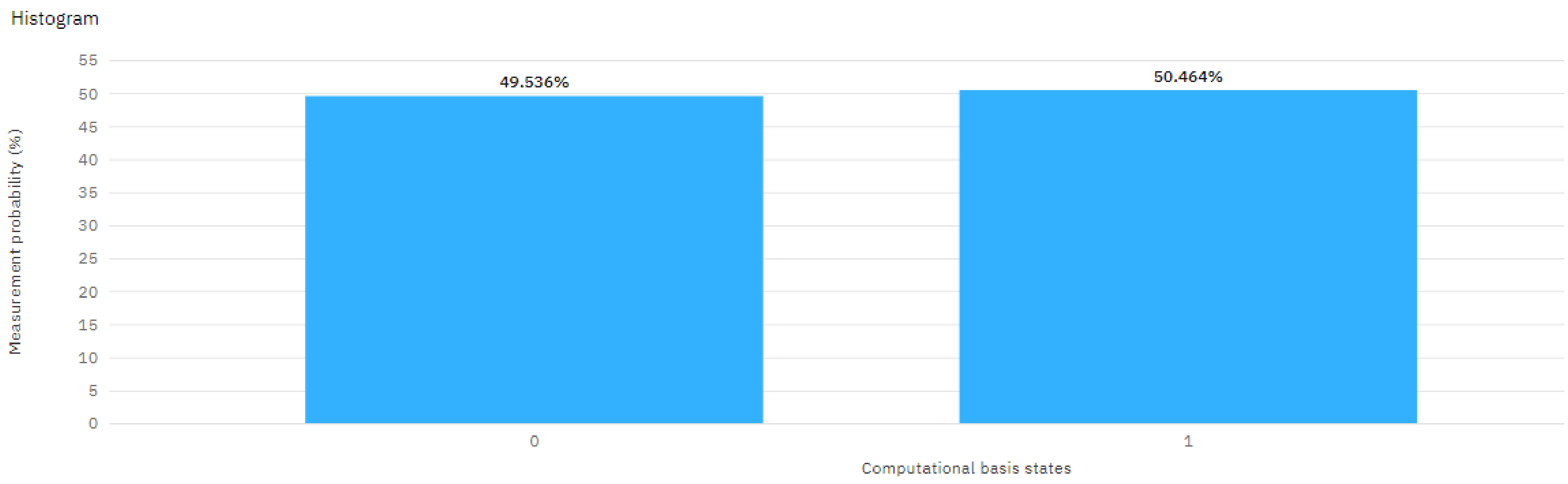
Гейт Адамара

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$



Гейт Адамара





Гейт Адамара

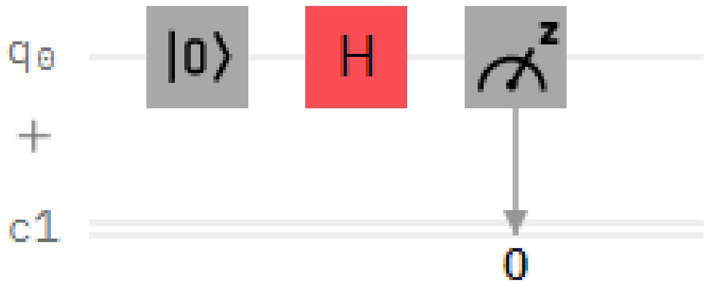
Оператор H является самосопряженным, а, следовательно, обратным к себе самому, то его повторное применение к базису Адамара вернет нам обычный базис. Другими словами, алгебраические вычисления дают $H^2=I$. То есть двукратное применение гейта H возвращает систему в исходное положение.

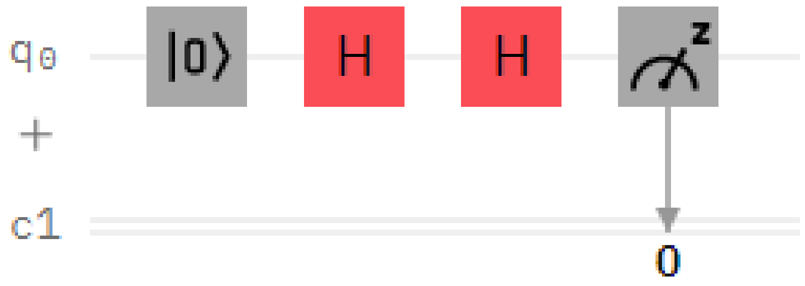
$$|0\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = |0\rangle.$$

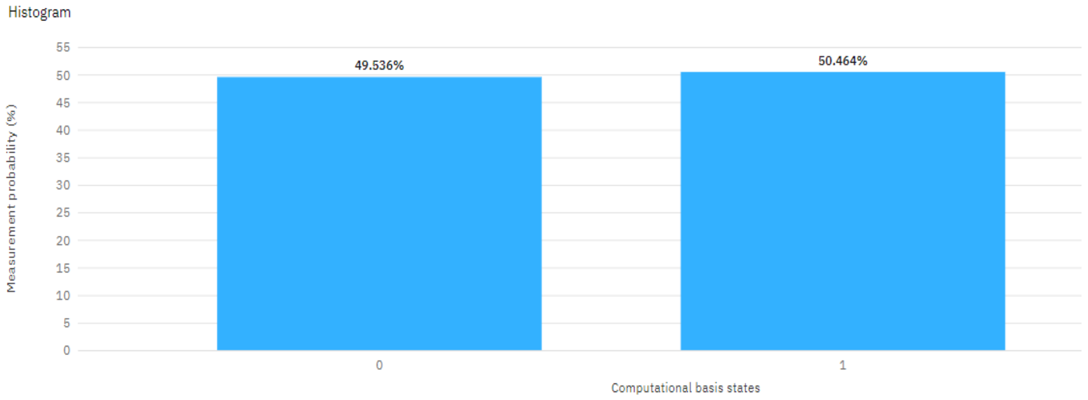
$$|1\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = |1\rangle.$$

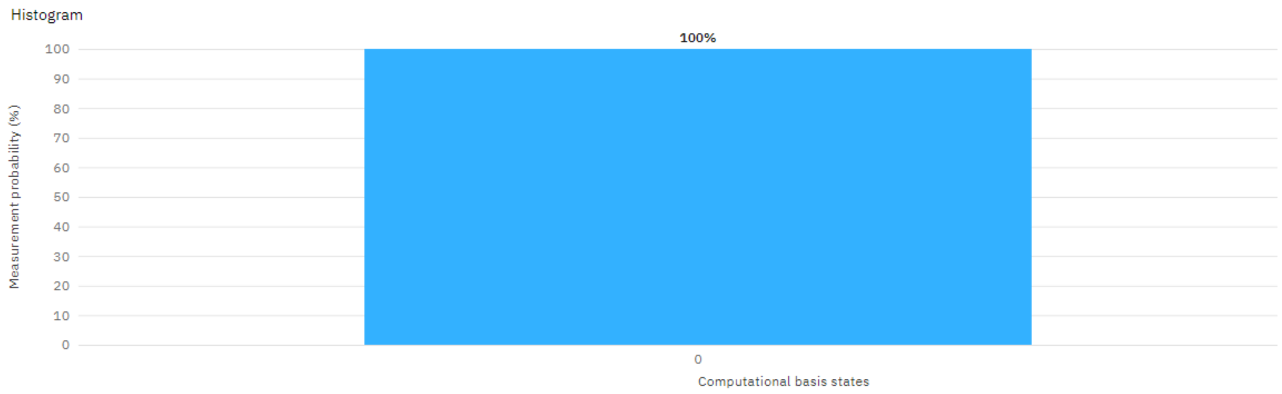
$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \xrightarrow{H} \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\\alpha-\beta\end{pmatrix} \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\\alpha-\beta\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\begin{pmatrix}2\alpha\\2\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

Гейт Адамара





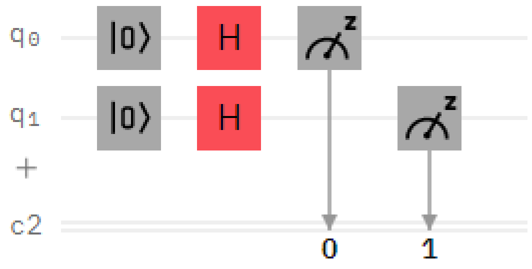


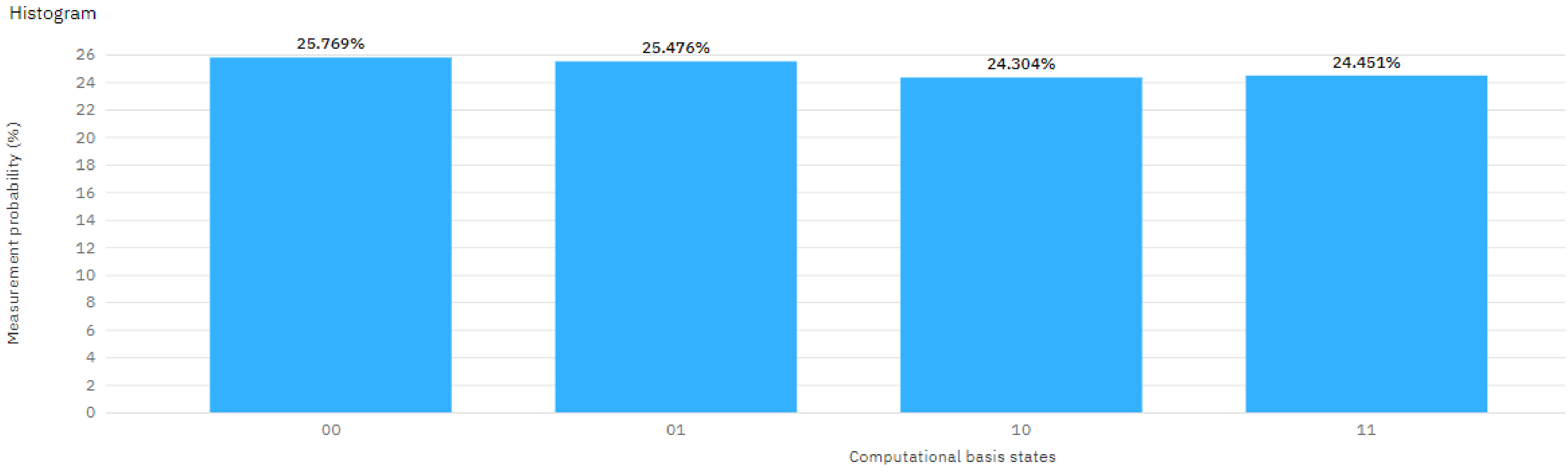


Гейт Адамара

Если у нас имеется система из *n* кубитов то применив ***оператор Адамара*** ко всем кубитам индивидуально, мы получим суперпозицию всех 2^n состояний:

$$\left(H \otimes H \otimes H \otimes H \ldots \otimes H \otimes H\right)\left|0000\ldots00\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\Big(\big(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\big) \otimes \big(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\big) \otimes \ldots \otimes \big(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\big)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{z=0}^{2^n-1}\left|z\right\rangle.$$





Оператор NOT (Гейт X)

В классических дискретных вычислениях оператор *NOT* – это оператор инверсии. В соответствии с этим определением классического оператора *NOT*, квантовый ***гейт X*** может быть определен по аналогии:

$$\left|\Psi\right\rangle = \alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle \Rightarrow NOT\ \left|\Psi\right\rangle = \alpha\left|1\right\rangle + \beta\left|0\right\rangle$$

Квантовым аналогом классического оператора *NOT* является матрица вида:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Оператор NOT (Гейт X)

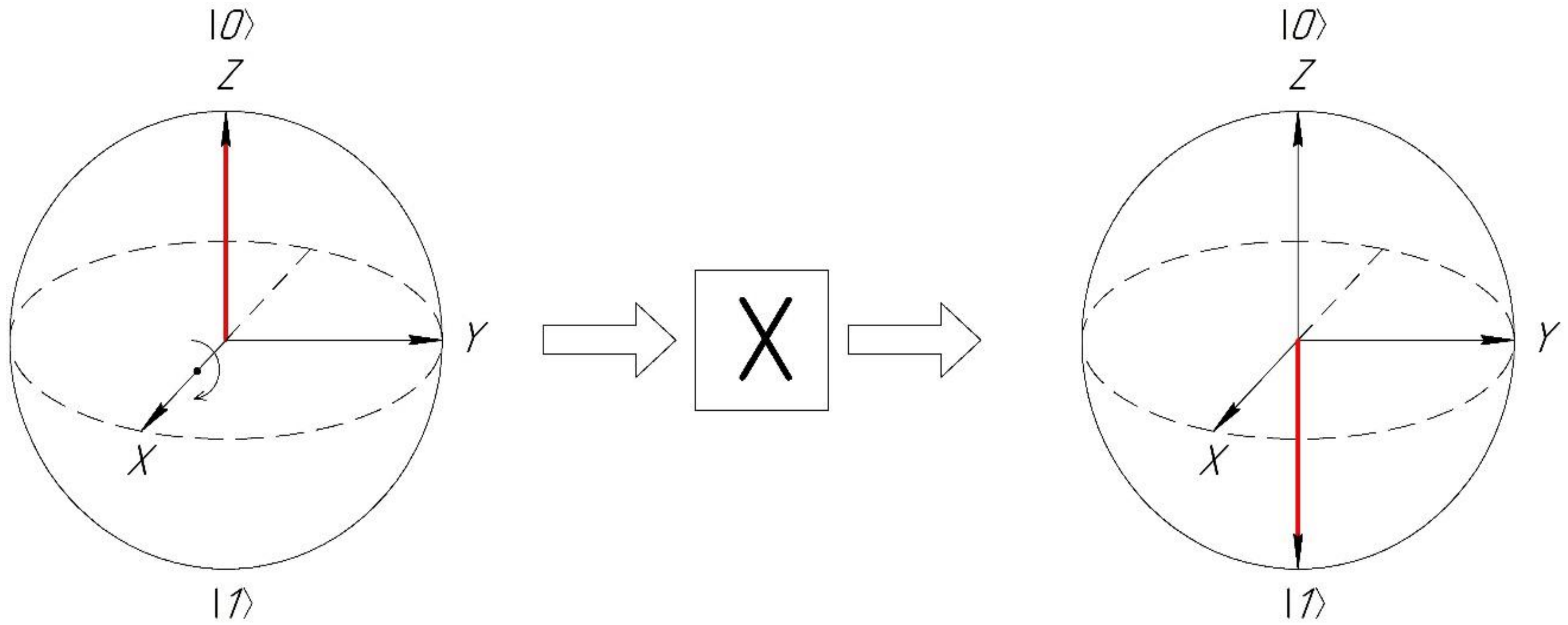
Покажем действия ***гейта X*** на кубит в различных состояниях:

$$X\left|0\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left|1\right\rangle$$

$$X\left|1\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left|0\right\rangle$$

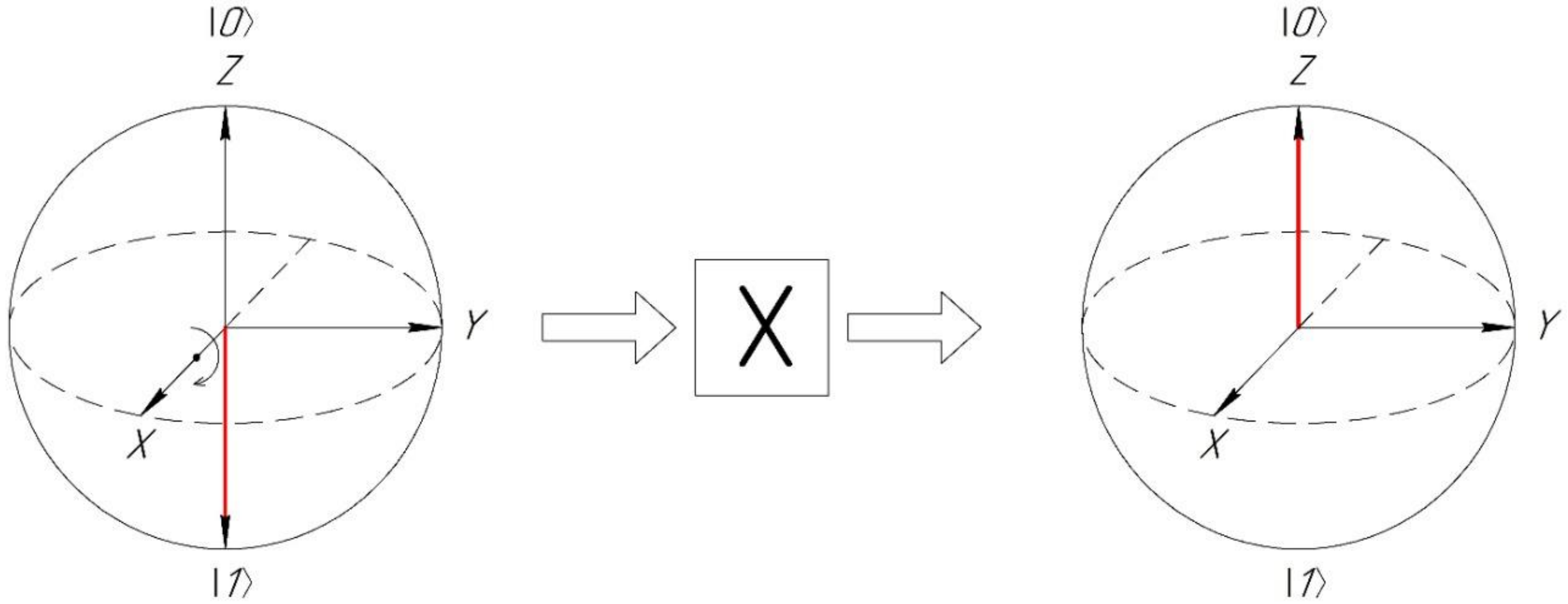
$$X\left|\psi\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \beta\left|0\right\rangle + \alpha\left|1\right\rangle$$

Оператор NOT (Гейт X)



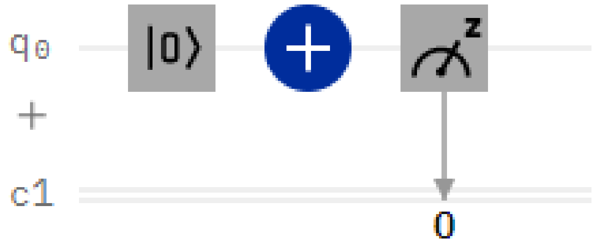
С точки зрения интерпретации действия данного гейта на состояние ***кубита*** с помощью сферы Блоха, можно заметить, что происходит поворот вектора состояния на 180 градусов вокруг оси *X*.

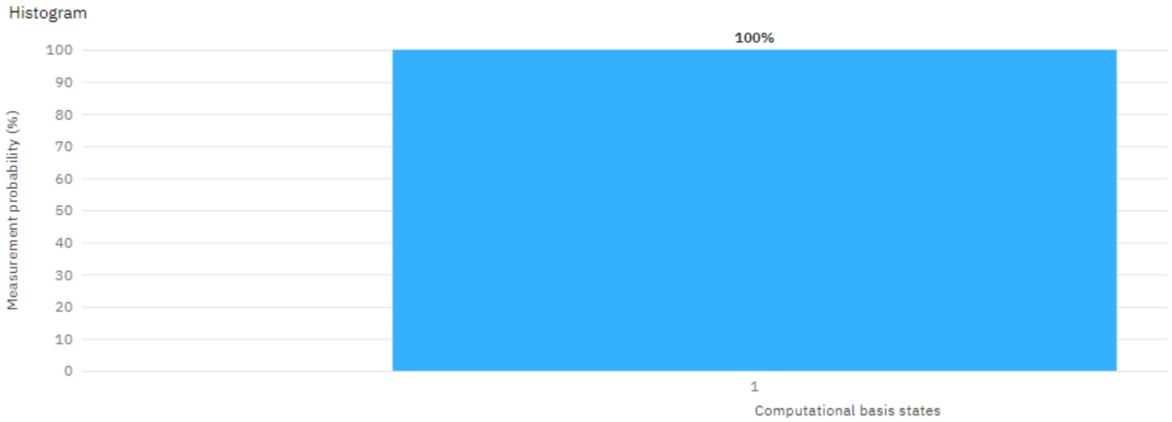
Оператор NOT (Гейт X)

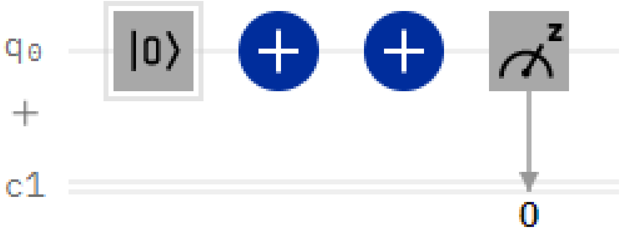


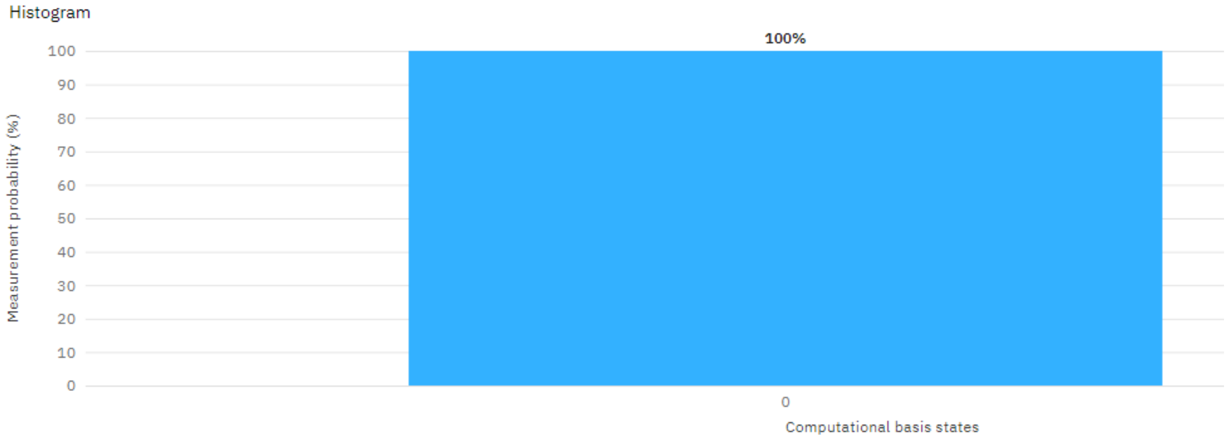
С точки зрения интерпретации действия данного гейта на состояние ***кубита*** с помощью сферы Блоха, можно заметить, что происходит поворот вектора состояния на 180 градусов вокруг оси *X*.

Оператор NOT (Гейт X)









Гейт Z

Определим сначала действие ***гейта Z*** на базисные вектора. Потребуем, чтобы он не изменял 0, а 1 переводил в -1:

$$\left|\Psi\right\rangle = \alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle \Rightarrow Z\left|\Psi\right\rangle = \alpha\left|0\right\rangle - \beta\left|1\right\rangle$$

Действию данного ***гейта Z*** отвечает матрица:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Гейт Z

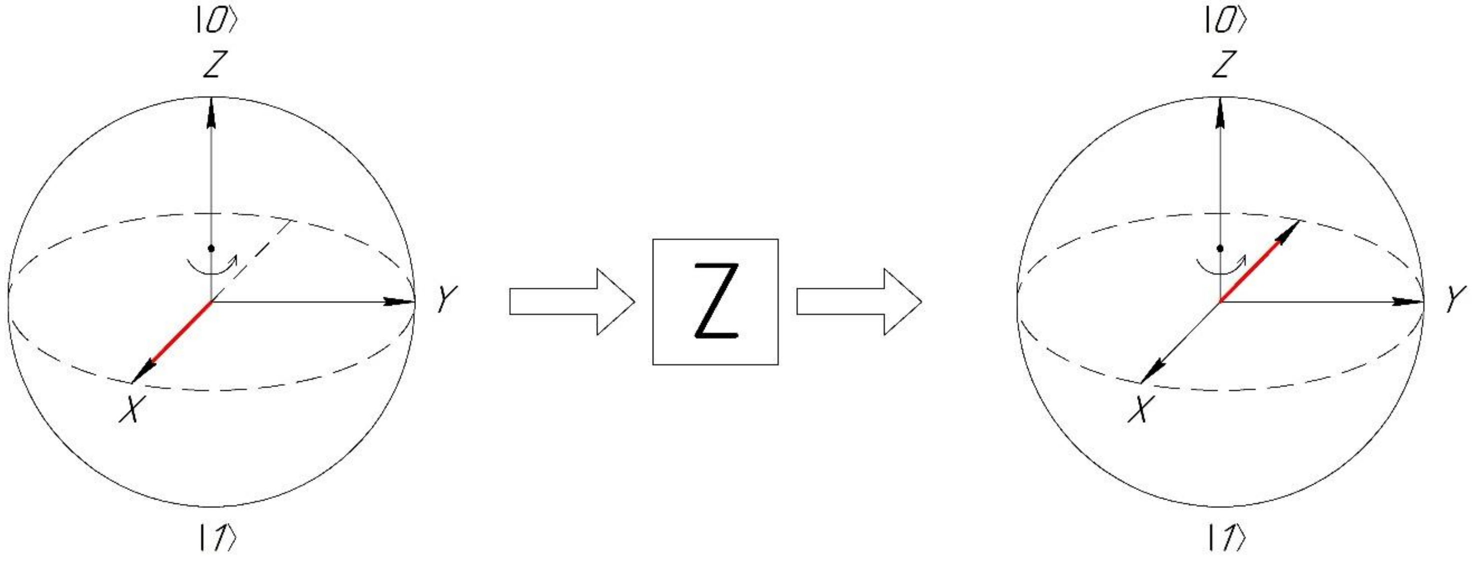
Покажем действия ***гейта Z*** на кубит в различных состояниях:

$$Z\left|0\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left|0\right\rangle$$

$$Z\left|1\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\left|1\right\rangle$$

$$Z\left|\psi\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \alpha\left|0\right\rangle - \beta\left|1\right\rangle$$

Гейт Z



На сфере Блоха действие ***гейта Z*** соответствует повороту вектора вокруг оси Z на угол π.

Гейт Z

Отметим следующие два свойства ***гейтов X*** и ***Z***:

$$HXH = Z$$

$$HZH = X$$

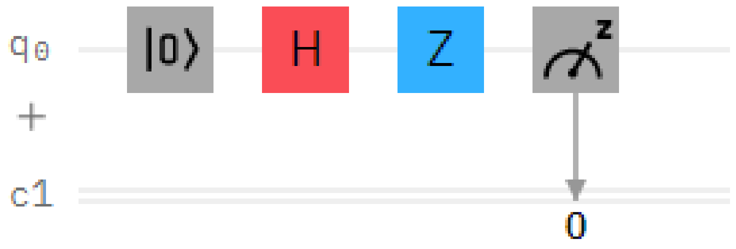
$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$H|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

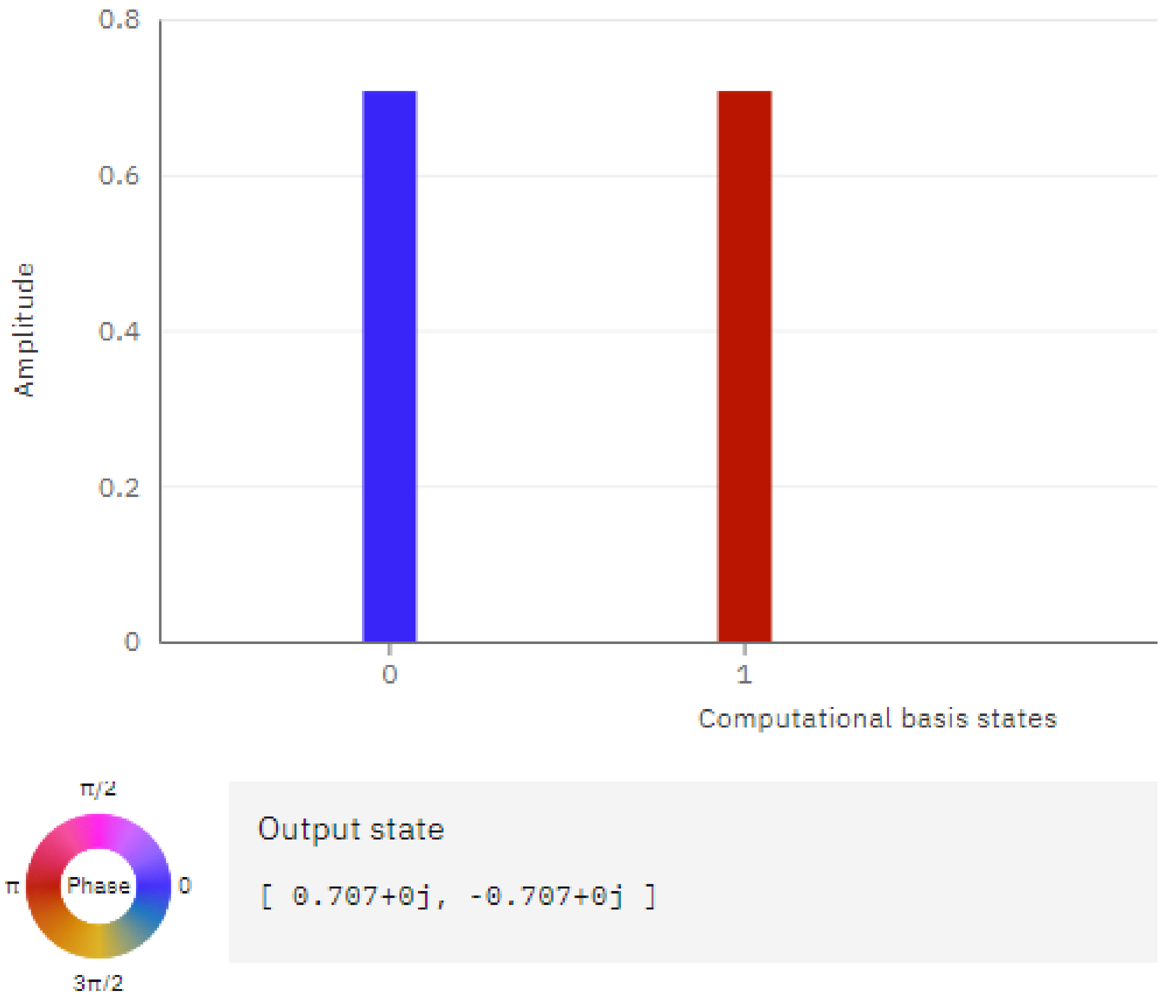
$$XH|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha-\beta \\ \alpha+\beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$HXH|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha-\beta \\ \alpha+\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2\alpha \\ -2\beta \end{pmatrix} = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

Гейт Z



q0
|0⟩
H
Z
z
c1
0



0.8
0.6
0.4
0.2
0
Amplitude
0
1
Computational basis states
π/2
π
Phase
0
3π/2
Output state
[0.707+0j, -0.707+0j]

Гейт Y

Гейт Y задается матрицей:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

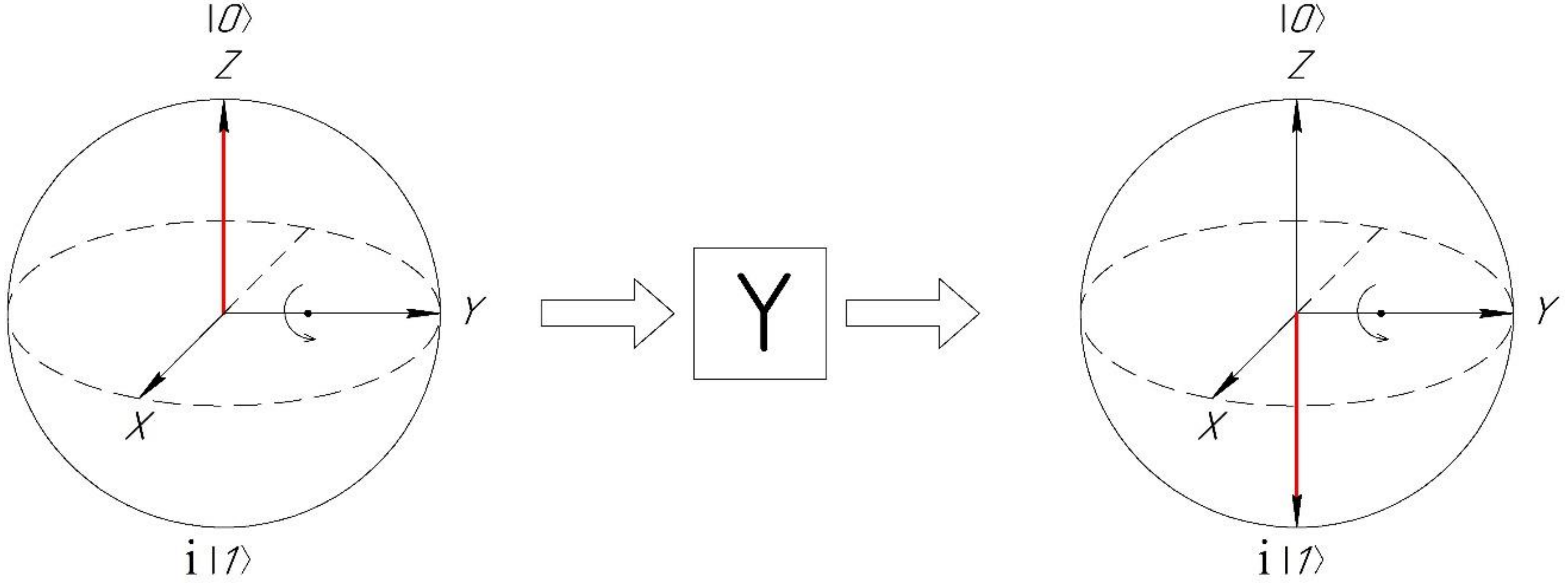
Покажем действия ***гейта Y*** на кубит в различных состояниях.

$$Y|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i|1\rangle$$

$$Y|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} = -i|0\rangle$$

$$Y|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\beta \\ i\alpha \end{pmatrix} = -i\beta|0\rangle + i\alpha|1\rangle$$

Гейт Y



Отметим следующее свойства ***гейта Y***: $$HYH = -Y$$

Гейт Y

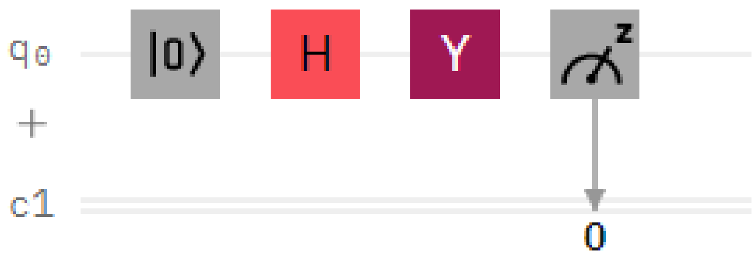
$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$H|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

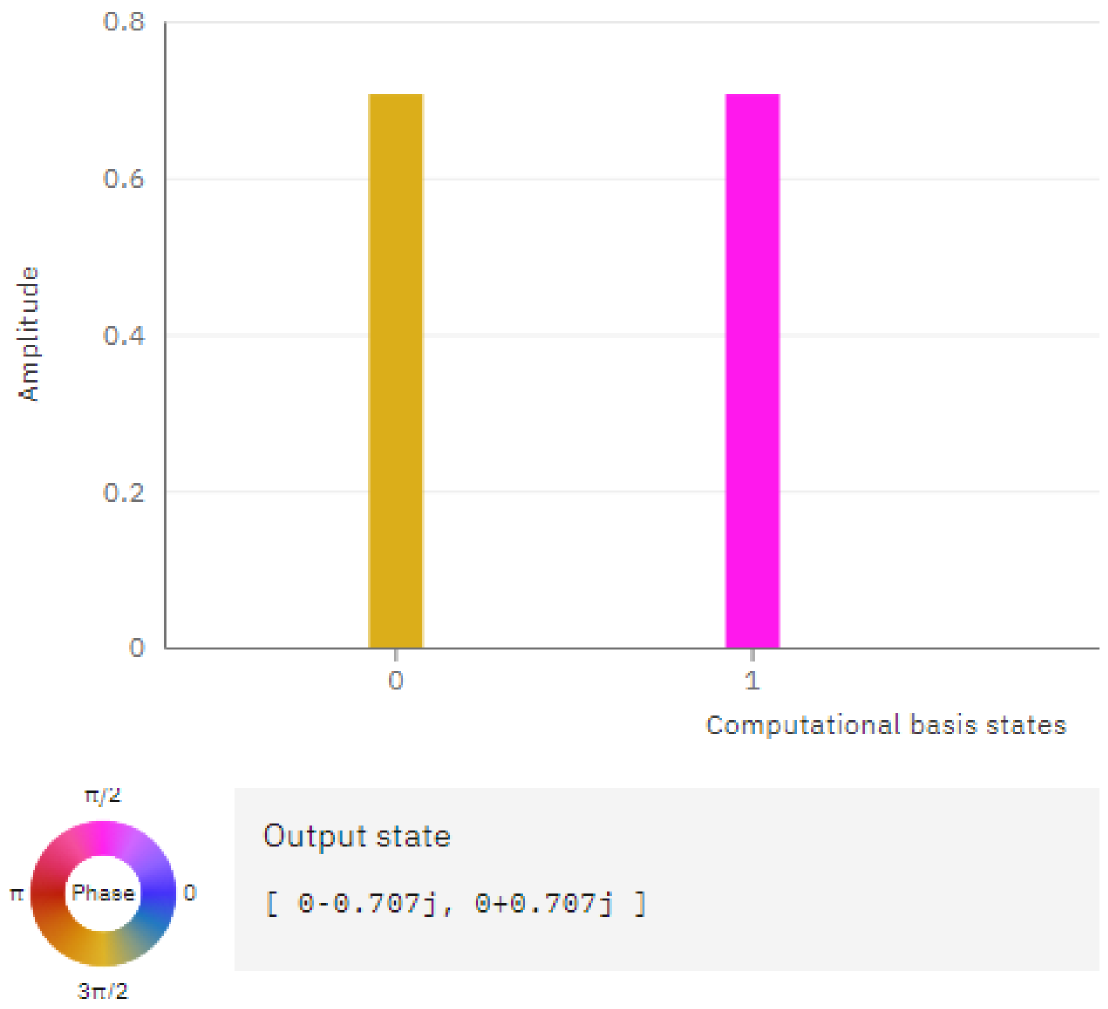
$$YH|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i(\alpha-\beta) \\ i(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \frac{-i(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i(\alpha+\beta)}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$HYH|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i(\alpha-\beta) \\ i(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2i\beta \\ -2i\alpha \end{pmatrix} = i\beta|0\rangle - i\alpha|1\rangle$$

Гейт Y



q0
|0⟩
H
Y
z
c1
0



0.8
0.6
0.4
0.2
0
Amplitude
0
1
Computational basis states
π/2
π
Phase
0
3π/2
Output state
[0-0.707j, 0+0.707j]

Гейт S

Гейт S задается матрицей:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

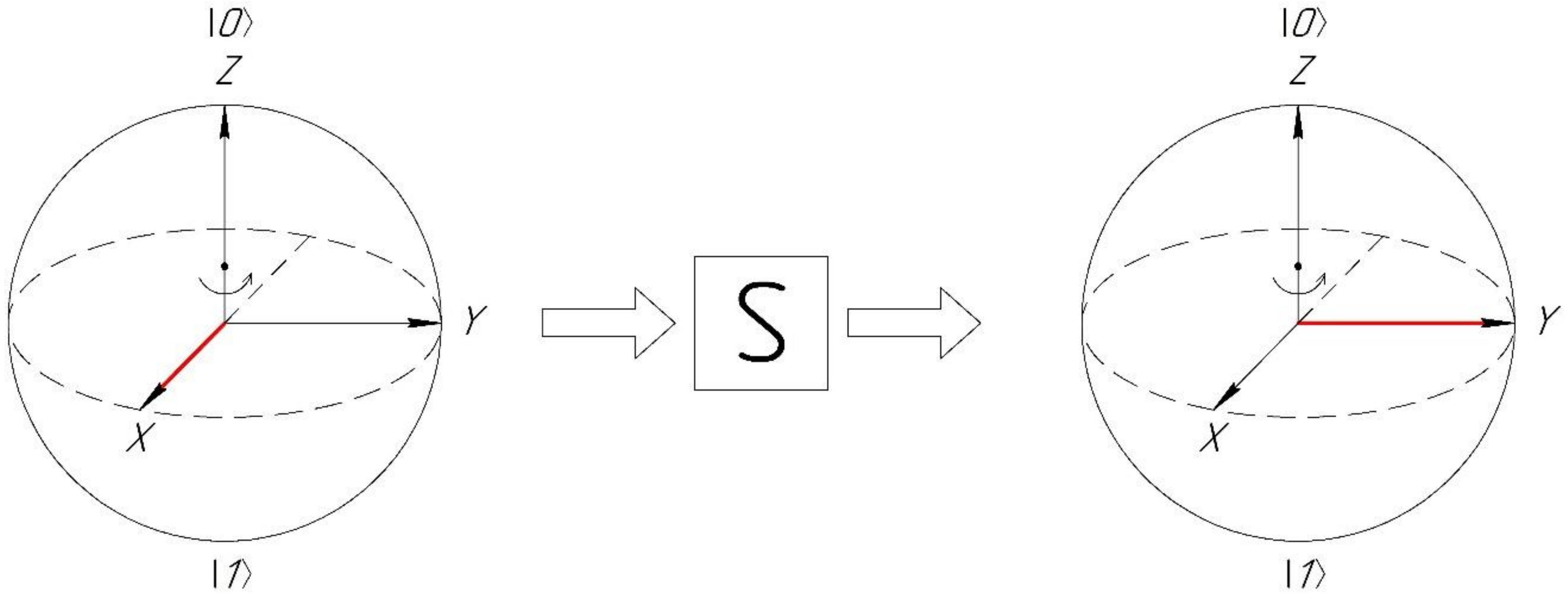
Покажем действия ***гейта S*** на кубит в различных состояниях:

$$S|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i|0\rangle$$

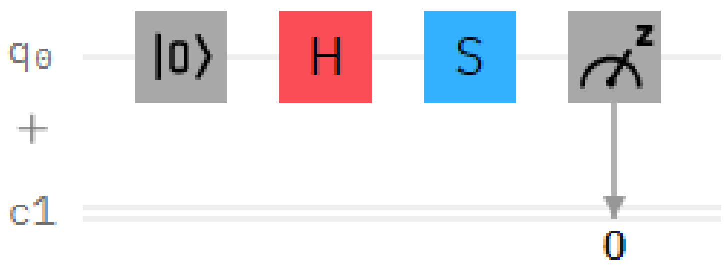
$$S|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i|1\rangle$$

$$S|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ i\beta \end{pmatrix} = \alpha|0\rangle + i\beta|1\rangle$$

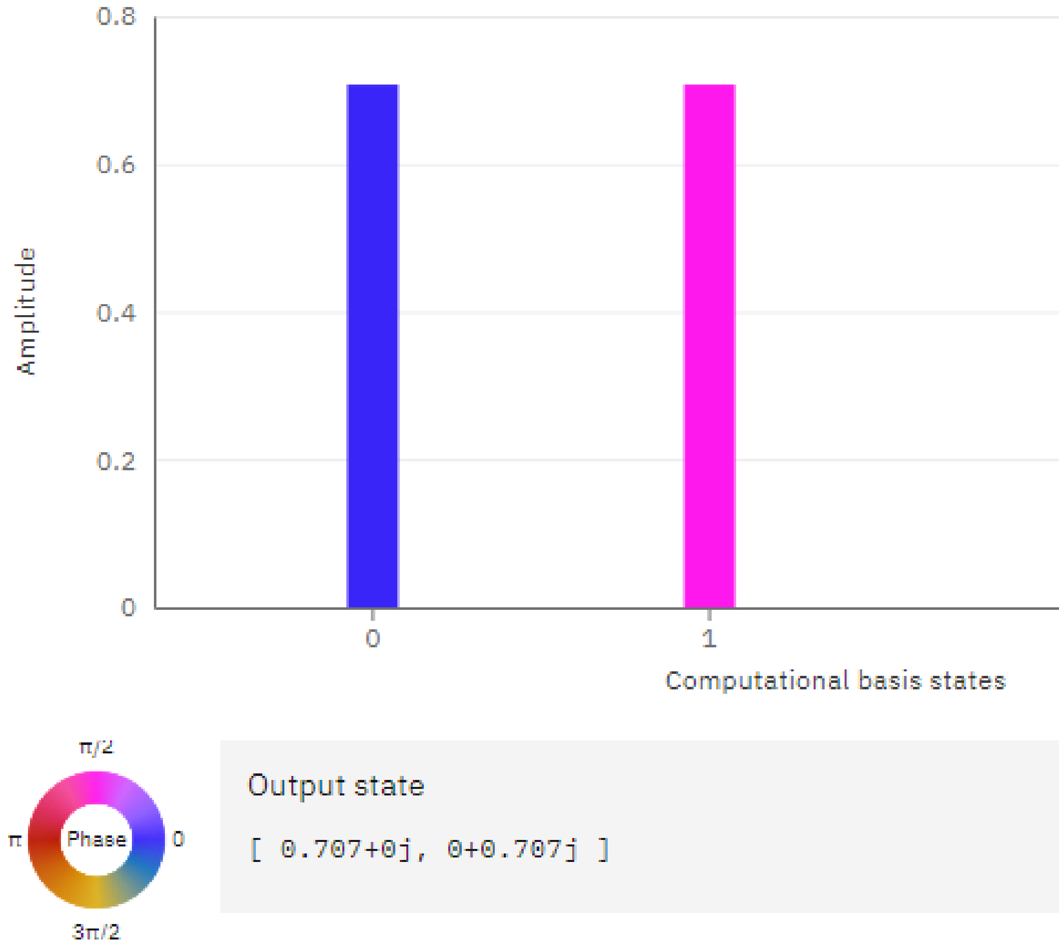
Гейт S



Гейт S



q0
|0⟩
H
S
z
c1
0



0.8
0.6
0.4
0.2
0
Amplitude
0
1
Computational basis states
π/2
π
Phase
0
3π/2
Output state
[0.707+0j, 0+0.707j]

Гейт T

Гейт T задается матрицей:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}. \qquad T = e^{i\frac{\pi}{8}} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{8}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{8}} \end{pmatrix}.$$

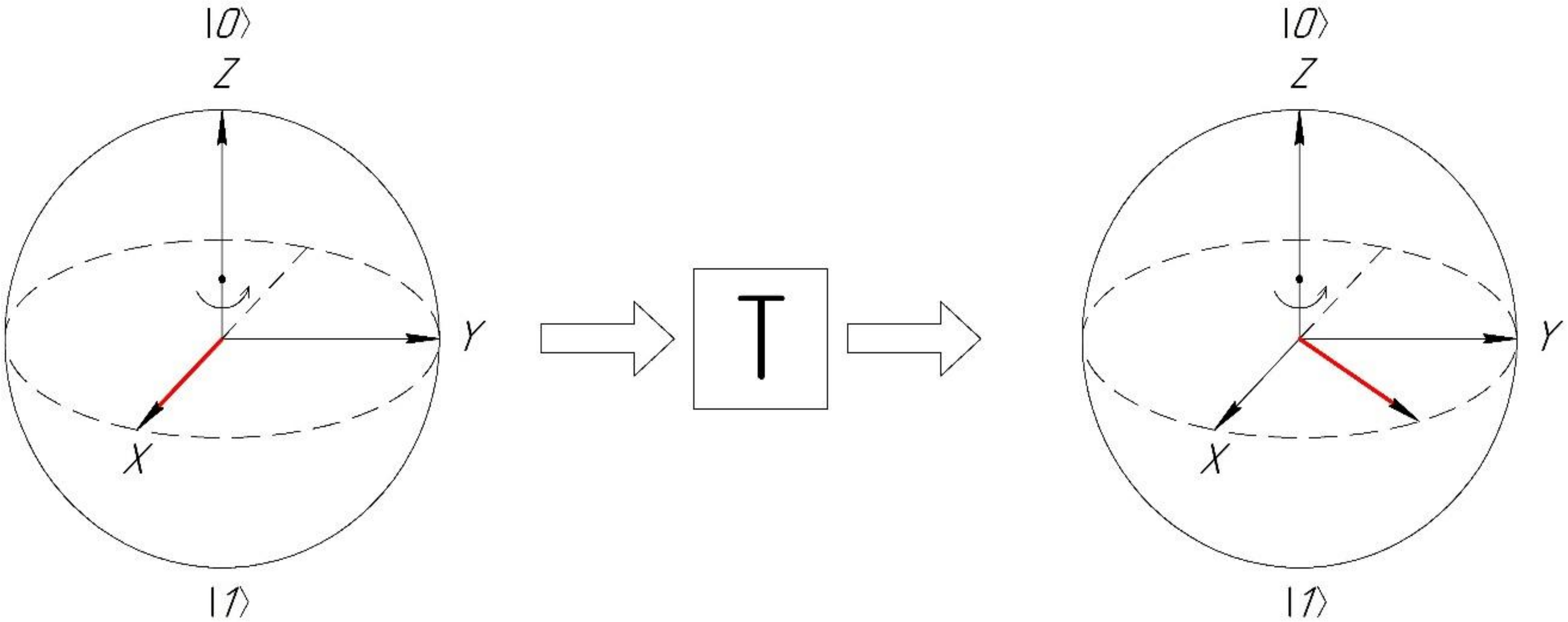
Покажем действия ***гейта T*** на ***кубит*** в различных состояниях:

$$T\left|0\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i\left|0\right\rangle$$

$$T\left|1\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left|1\right\rangle$$

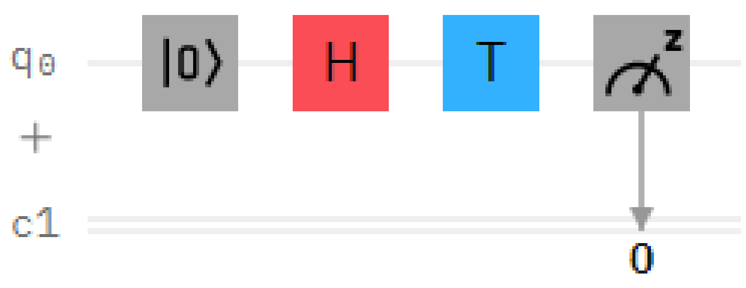
$$T\left|\psi\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ e^{i\frac{\pi}{4}}\beta \end{pmatrix} = \alpha\left|0\right\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}}\beta\left|1\right\rangle$$

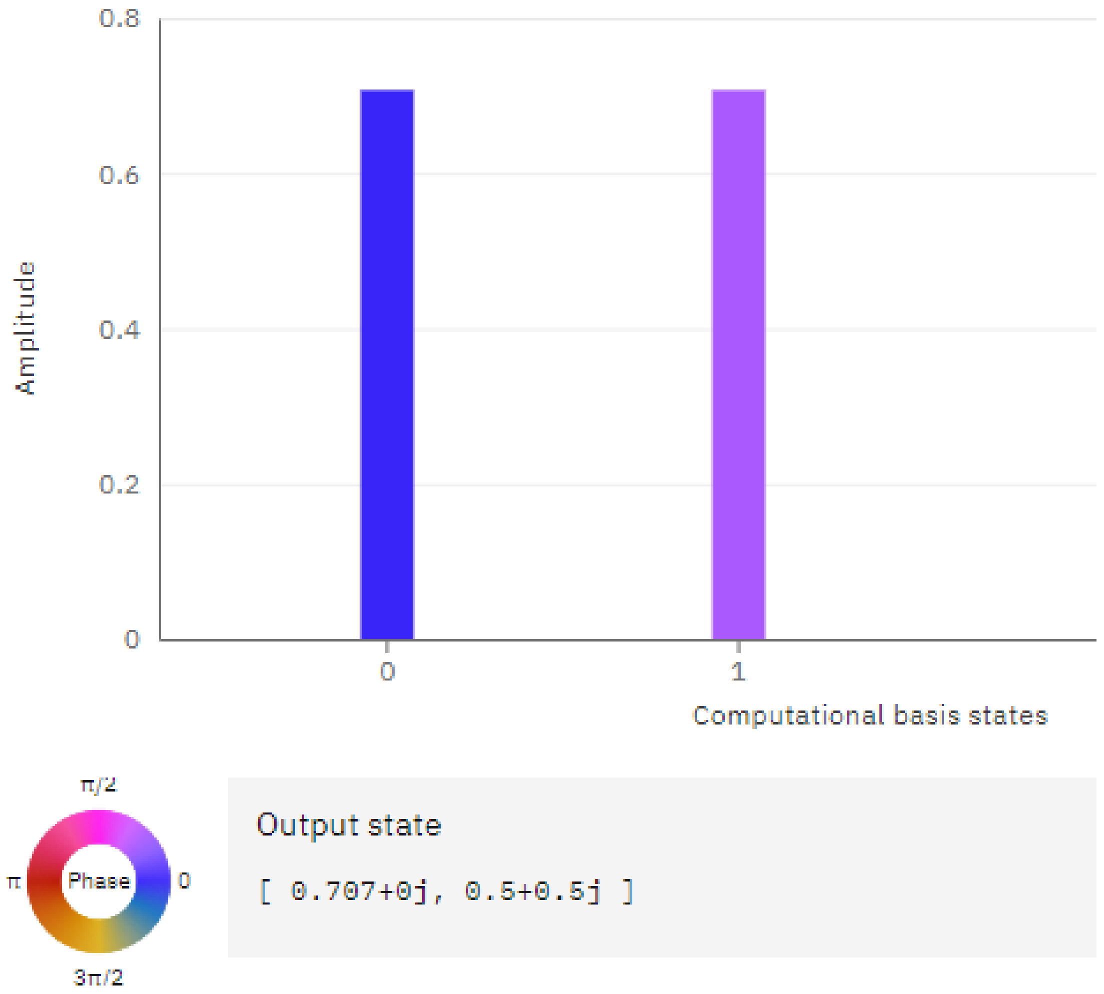
Гейт T



Таким образом, ***гейт T*** не изменяет коэффициент при базисном векторе 0 и меняет фазу коэффициента при базисном векторе 1.

Гейт T


q0
|0⟩
H
T
z
c1
0


0.8
0.6
0.4
0.2
0
Amplitude
0
1
Computational basis states
π/2
π
Phase
0
3π/2
Output state
[0.707+0j, 0.5+0.5j]

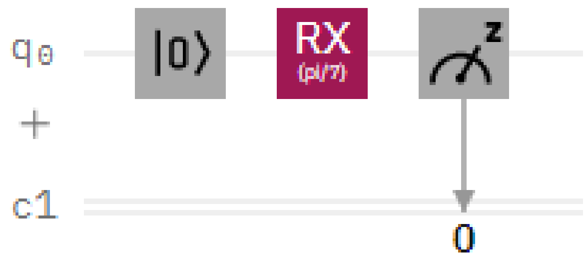
Гейты поворота Rx, Ry, Rz

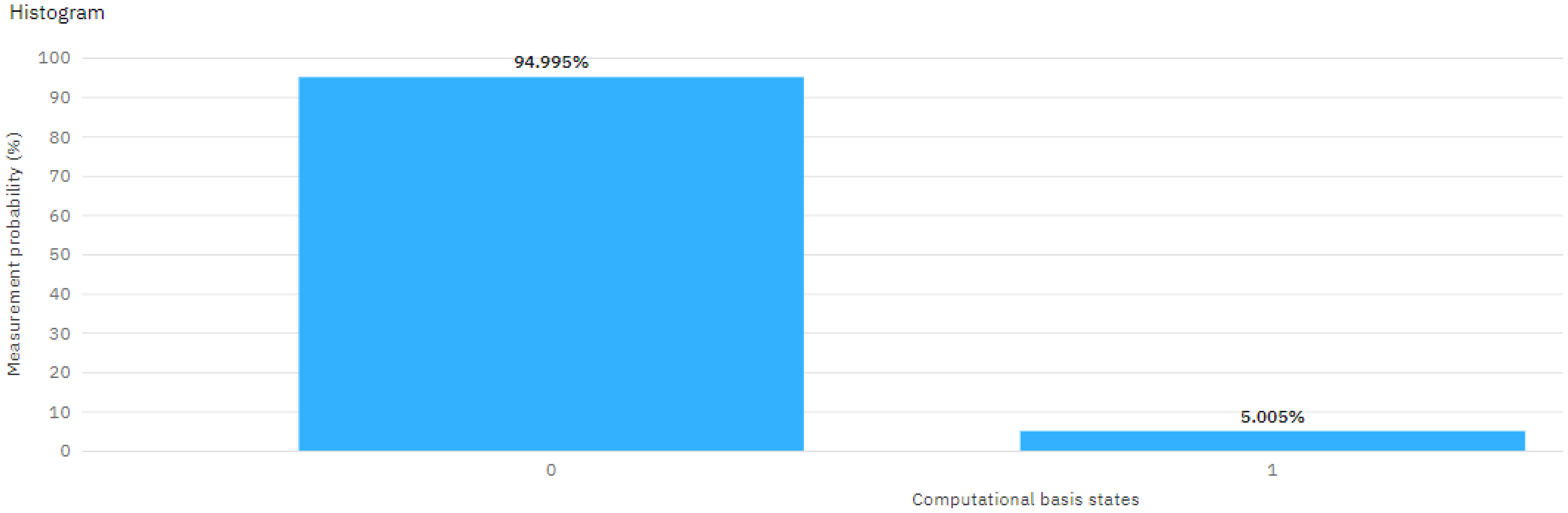
$$Rx(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}X} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$Rz(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}Z} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

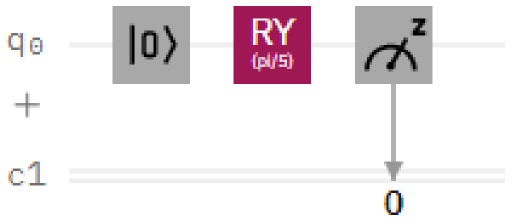
$$Ry(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}Y} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

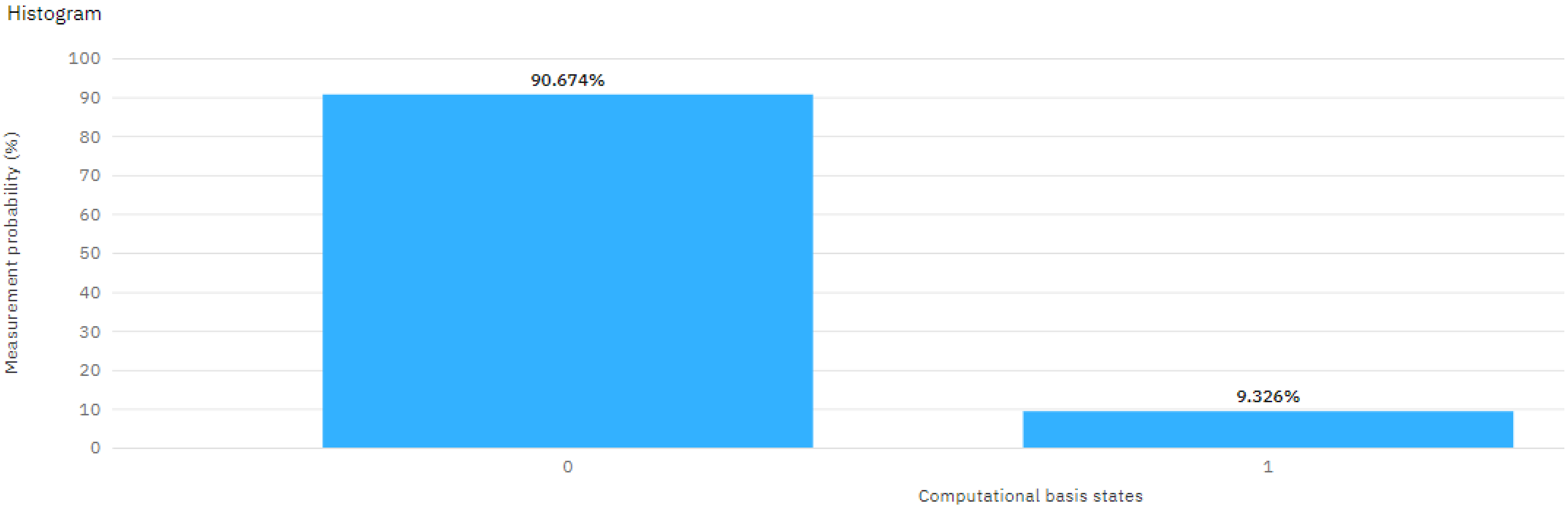
Гейты поворота Rx, Ry, Rz





Гейты поворота Rx, Ry, Rz





Произвольные однокубитные унитарные гейты U

Произвольный однокубитовый унитарный оператор может быть записан в виде:

$$U = e^{i\alpha} R_{\vec{n}}(\theta)$$

Гейт U1 осуществляет вращение одного кубита вокруг оси *Z*. В матричном виде данный гейт можно записать как:

$$U1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda} \end{pmatrix}$$

В зависимости от значения угла данный гейт является эквивалентом других гейтов:

$$U1(\pi) = Z \qquad U1\left(\frac{\pi}{2}\right) = S \qquad U1\left(\frac{\pi}{4}\right) = T$$

Произвольные однокубитные унитарные гейты U

Гейт U2 осуществляет вращение одного кубита вокруг $X+Y$ осей. Согласно теореме $X–Y$ разложения для однокубитового гейта данный оператор определяется как:

$$U2(\varphi,\lambda) = Rz\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)Rx\left(\frac{\pi}{2}\right)Rz\left(\lambda-\frac{\pi}{2}\right).$$

В матричном виде данный гейт можно записать как:

$$U2(\varphi,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -e^{i\lambda} \\ e^{i\varphi} & e^{i(\varphi+\lambda)} \end{pmatrix}.$$

$$U2(0,\pi) = H$$

Произвольные однокубитные унитарные гейты U

Гейт U3 – это универсальный однокубитный поворотный затвор с тремя углами Эйлера. Данный гейт определяется как:

$$U3(\theta,\varphi,\lambda) = Rz\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) Rx\left(\frac{\pi}{2}\right) Rz(\pi - \theta) Rx\left(\frac{\pi}{2}\right) Rz\left(\lambda - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U3(\theta,\varphi,\lambda) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -e^{i\lambda}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{i(\varphi+\lambda)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$U3\left(\theta, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = Rx(\theta) \qquad U3(\theta,0,0) = Ry(\theta)$$

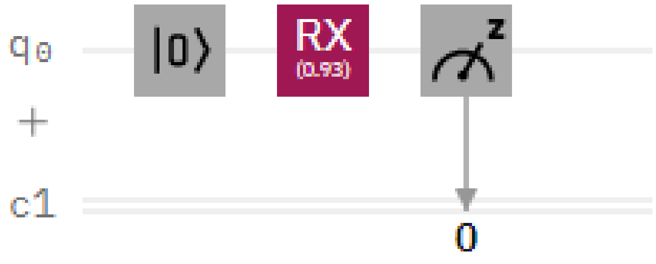
Квантовые гейты

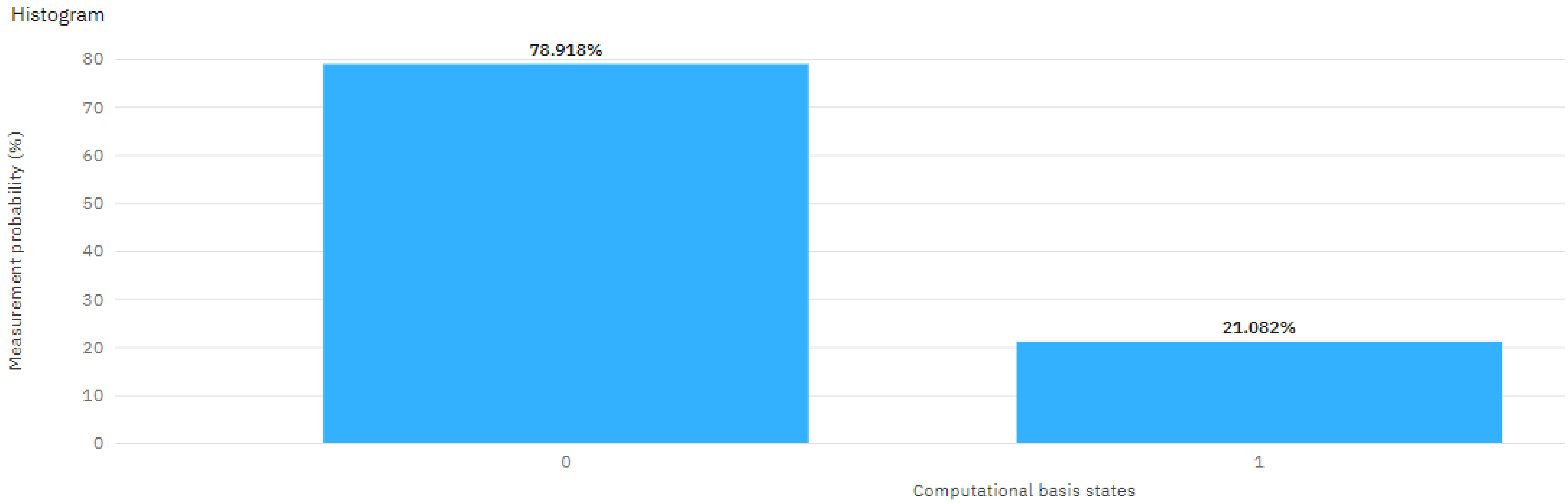
Получим кубит в состоянии суперпозиции: $|\psi\rangle = \sqrt{0.8}|0\rangle + \sqrt{0.2}|1\rangle$

$$Rx(\theta)|0\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle - i\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = 0.8 \;\Rightarrow\; \theta \approx 0.93\,\text{рад}$$

Квантовые гейты





Контролируемые гейты

Для квантовых вычислений как правило требуется больше одного ***кубита***:

$$|q_1\rangle ... |q_n\rangle = \left(\alpha_0|0\rangle + \beta_0|1\rangle\right) \otimes \left(\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle\right) \otimes ... \otimes \left(\alpha_{n-1}|0\rangle + \beta_{n-1}|1\rangle\right)$$

Например, система двух кубитов описывается как:

$$|\psi\rangle = |\psi_0\rangle \otimes |\psi_1\rangle = \left(\alpha_0|0\rangle + \beta_0|1\rangle\right) \otimes \left(\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle\right) = \alpha_0\alpha_1|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \beta_0\alpha_1|10\rangle + \beta_0\beta_1|11\rangle$$

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \lambda|10\rangle + \delta|11\rangle$$

Контролируемые гейты

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

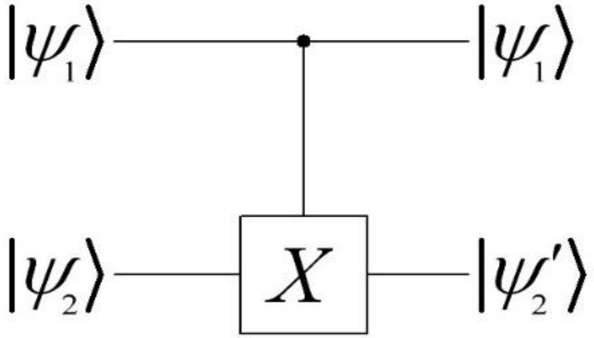
$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \lambda|10\rangle + \delta|11\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \lambda \\ \delta \end{pmatrix}$$

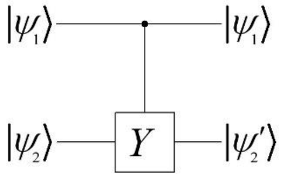
Контролируемые гейты



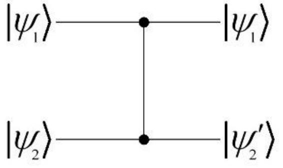
$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CNOT|00\rangle \Rightarrow |00\rangle$$
$$CNOT|01\rangle \Rightarrow |01\rangle$$
$$CNOT|10\rangle \Rightarrow |11\rangle$$
$$CNOT|11\rangle \Rightarrow |10\rangle$$

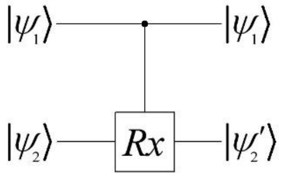
Контролируемые гейты



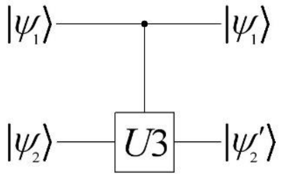
$$CY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$



$$CZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

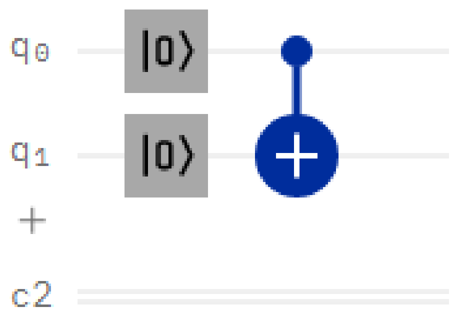


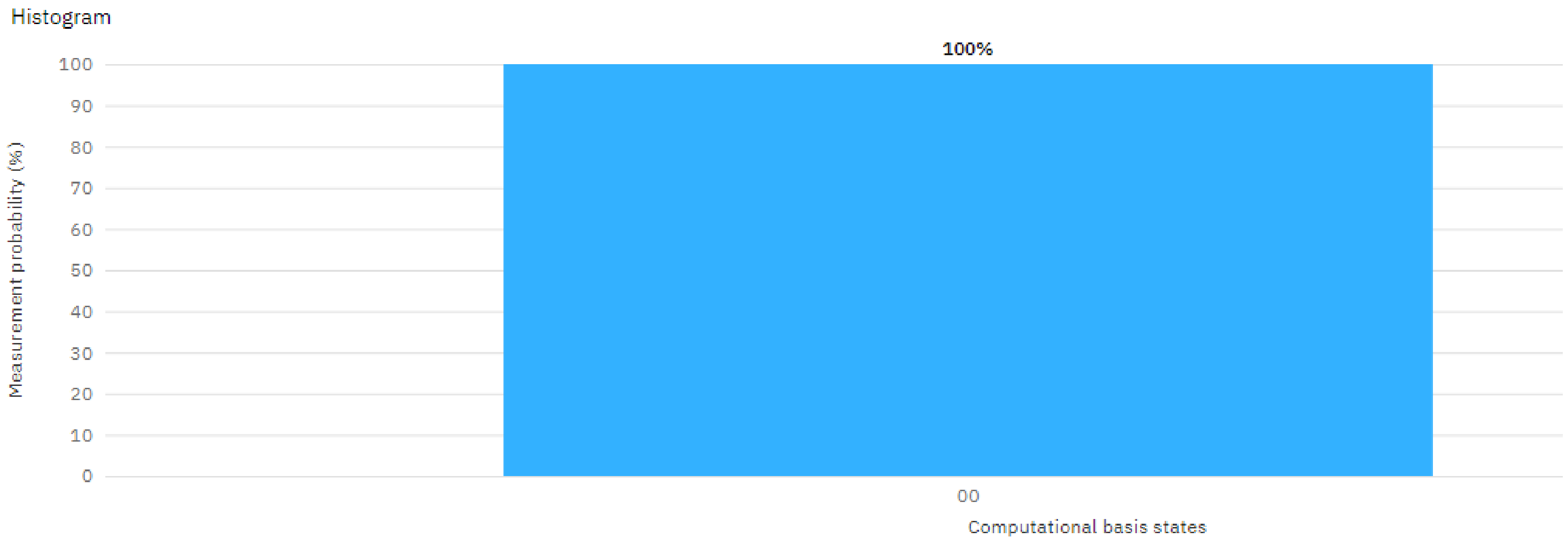
$$CRx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 0 & 0 & -i\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$



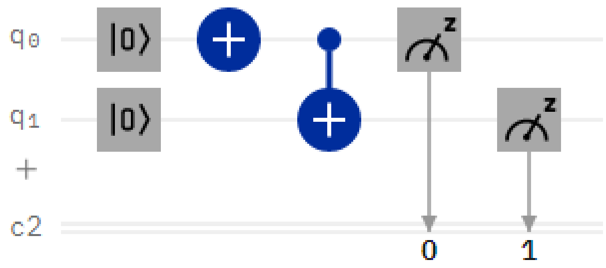
$$CU3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -e^{i\lambda}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 0 & 0 & e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{i(\varphi+\lambda)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

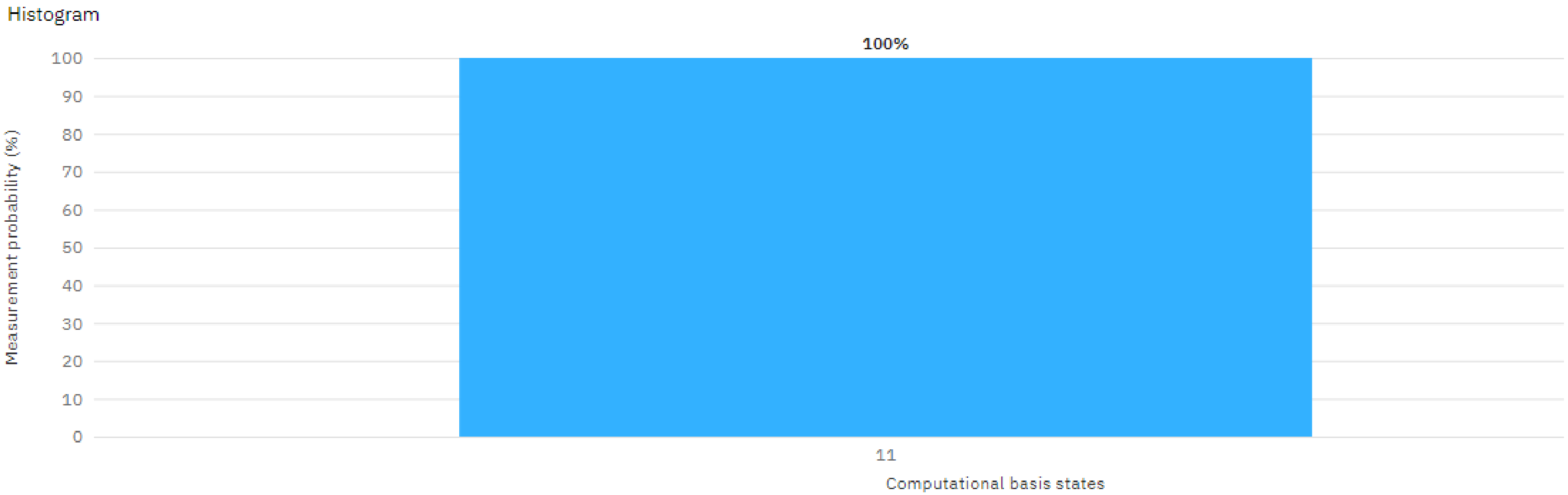
Контролируемые гейты





Контролируемые гейты





Перепутанные состояния. Сверхплотное кодирование. Квантовая телепортация

Перепутанные состояния. Базис Белла

Рассмотрим два незапутанных кубита. Незапутанность двух кубитов подразумевает, что измерение первого кубита не влияет на результат измерения второго кубита.

$$|\Psi_1\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$$

$$|\Psi_2\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$$

Состояние пары кубитов получается перемножение одиночных состояний:

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1\Psi_2\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$$

Перепутанные состояния. Базис Белла

Перепутанное состояние двух кубитов – это состояние, при котором измерение одного из кубитов однозначно определяет состояние второго кубита. Такое состояние системы двух кубитов можно записать следующим образом:

$$\left|\Psi\right\rangle = \left|\Psi_1\Psi_2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|00\right\rangle + \left|11\right\rangle\right)$$

$$\left|\Psi\right\rangle = \left|\Psi_1\Psi_2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|01\right\rangle + \left|10\right\rangle\right)$$

$$\left|\Psi\right\rangle = \left|\Psi_1\Psi_2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|00\right\rangle - \left|11\right\rangle\right)$$

$$\left|\Psi\right\rangle = \left|\Psi_1\Psi_2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|01\right\rangle - \left|10\right\rangle\right)$$

Перепутанные состояния. Базис Белла

Для понимания специфики подобных состояний можно подробно рассмотреть процессы измерения, например, для состояний:

$$\left|\Psi\right\rangle = \alpha_{00}\left|00\right\rangle + \alpha_{01}\left|01\right\rangle + \alpha_{10}\left|10\right\rangle + \alpha_{11}\left|11\right\rangle$$

$$\left|\Psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|01\right\rangle + \left|10\right\rangle\right)$$

Перепутанные состояния. Базис Белла

$$|\Psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$$

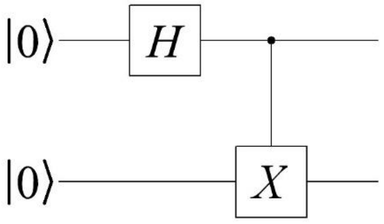
$$|\Psi\rangle = \frac{\alpha_{00}}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}|00\rangle + \frac{\alpha_{01}}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}|01\rangle$$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right)$$

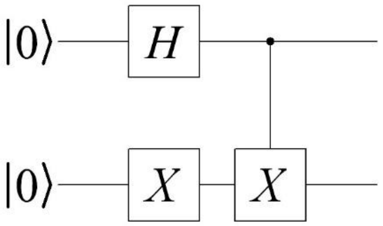
$$|\Psi\rangle = |01\rangle$$

Перепутанные состояния. Базис Белла

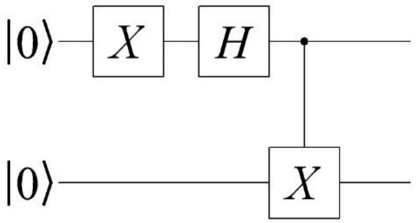
Для понимания специфики подобных состояний можно подробно рассмотреть процессы измерения, например, для состояний:



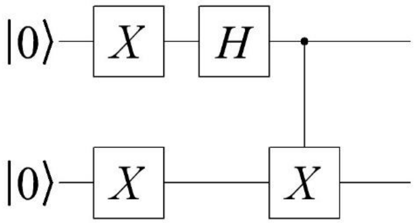
$$\left|\Psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|00\right\rangle + \left|11\right\rangle\right)$$



$$\left|\Psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|01\right\rangle + \left|10\right\rangle\right)$$

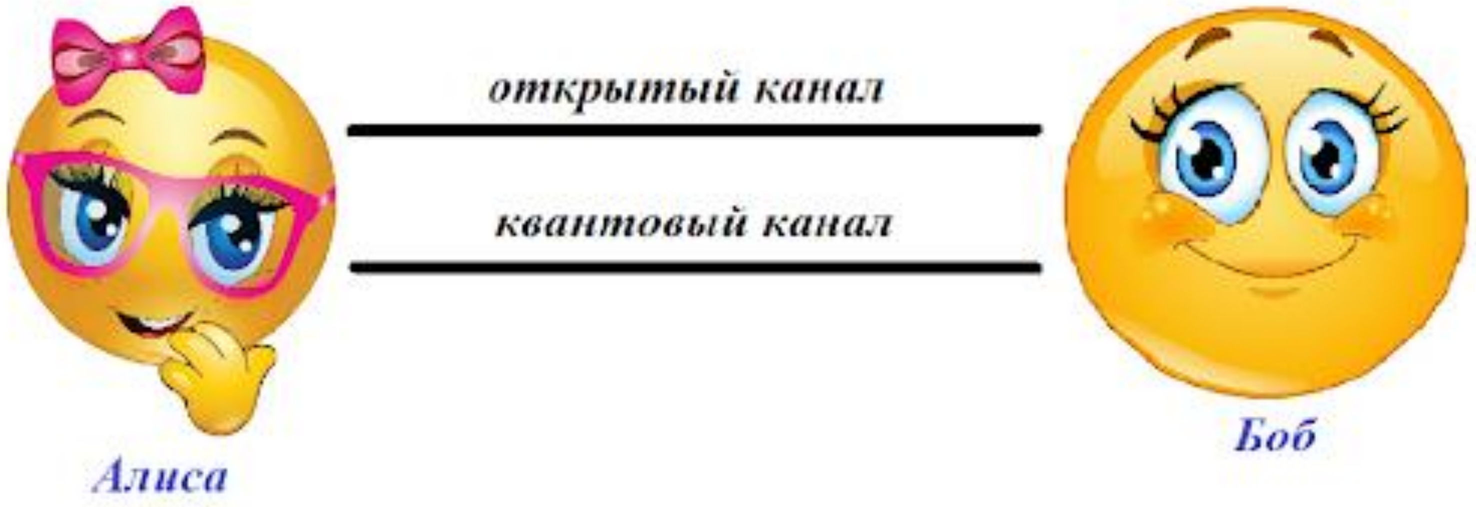


$$\left|\Psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|00\right\rangle - \left|11\right\rangle\right)$$



$$\left|\Psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|01\right\rangle - \left|10\right\rangle\right)$$

Сверхплотное кодирование



Сверхплотное кодирование

Приведем пример применения перепутанности квантовых состояний. Допустим Алиса хочет передать бобу одну из цифр от 0 до 3. Для организации передачи информации между Бобом и Алисой каждому из них пересылается один из двух кубитов приготовленных в запутанном состоянии

$$\left|\psi_0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|00\right\rangle + \left|11\right\rangle\right)$$

Пусть Алиса получает первый кубит, а Боб второй.
При этом Алиса может осуществлять преобразование на своем кубите, а Боб на своем.

Сверхплотное кодирование

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \lambda|10\rangle + \delta|11\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \lambda \\ \delta \end{pmatrix}$$

Сверхплотное кодирование

Алгоритм обмена информации будет следующим:

1. Алиса получает извне два классических бита, которые кодируют цифры от 0 до 3. В зависимости от значения числа Алиса совершает одно из преобразований I, X, Y или Z:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 \Rightarrow \left(I \otimes I\right)|\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 \Rightarrow \left(I \otimes I\right)|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

Сверхплотное кодирование

1. Алиса получает извне два классических бита, которые кодируют цифры от 0 до 3. В зависимости от значения числа Алиса совершает одно из преобразований I, X или Z:

$$1 \Rightarrow \left(X \otimes I \right)\left|\psi_0\right\rangle == \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1 \Rightarrow \left(X \otimes I \right)\left|\psi_0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|10\right\rangle + \left|01\right\rangle \right)$$

Сверхплотное кодирование

1. Алиса получает извне два классических бита, которые кодируют цифры от 0 до 3. В зависимости от значения числа Алиса совершает одно из преобразований I, X, Y или Z:

$$2 \Rightarrow (Z \otimes I)|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle - |11\rangle\right)$$

$$3 \Rightarrow (Z \otimes X)|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right)$$

Сверхплотное кодирование

2. Далее Алиса передает свой кубит Бобу.
3. Боб применяет гейт CNOT к двум запутанным кубитам:

$$0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|00\right\rangle + \left|11\right\rangle\right) \Rightarrow CNOT \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|00\right\rangle + \left|10\right\rangle\right)$$

$$1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|10\right\rangle + \left|01\right\rangle\right) \Rightarrow CNOT \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|11\right\rangle + \left|01\right\rangle\right)$$

$$2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\left|10\right\rangle + \left|01\right\rangle\right) \Rightarrow CNOT \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\left|11\right\rangle + \left|01\right\rangle\right)$$

$$3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|00\right\rangle - \left|11\right\rangle\right) \Rightarrow CNOT \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|00\right\rangle - \left|10\right\rangle\right)$$

Сверхплотное кодирование

4. Далее Боб производит измерение второго кубита. В результате измерений он получит состояние   для цифр 0 и 3, состояние для цифр 1 и 2:

$$0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |10\rangle\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Первый кубит } \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \\ \text{Второй кубит } |0\rangle \end{cases} \qquad 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|11\rangle + |01\rangle\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Первый кубит } \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |0\rangle\right) \\ \text{Второй кубит } |1\rangle \end{cases}$$

$$2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|11\rangle + |01\rangle\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Первый кубит } \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|1\rangle + |0\rangle\right) \\ \text{Второй кубит } |1\rangle \end{cases} \qquad 3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle - |10\rangle\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Первый кубит } \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) \\ \text{Второй кубит } |0\rangle \end{cases}$$

$$\textit{Результат измерения вотрого кубита}:$$

$$|0\rangle \Rightarrow \begin{cases} \text{Либо } 0 \\ \text{Либо } 3 \end{cases} \qquad |1\rangle \Rightarrow \begin{cases} \text{Либо } 1 \\ \text{Либо } 2 \end{cases}$$

Сверхплотное кодирование

5. Далее Боб применяет преобразование Адамара к первому кубиту и измеряет его:

$$0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right)\right) = |0\rangle$$

$$1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\right) = |0\rangle$$

$$2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|0\rangle + |1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\right) = |1\rangle$$

$$3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|0\rangle + |1\rangle\right)\right) = |1\rangle$$

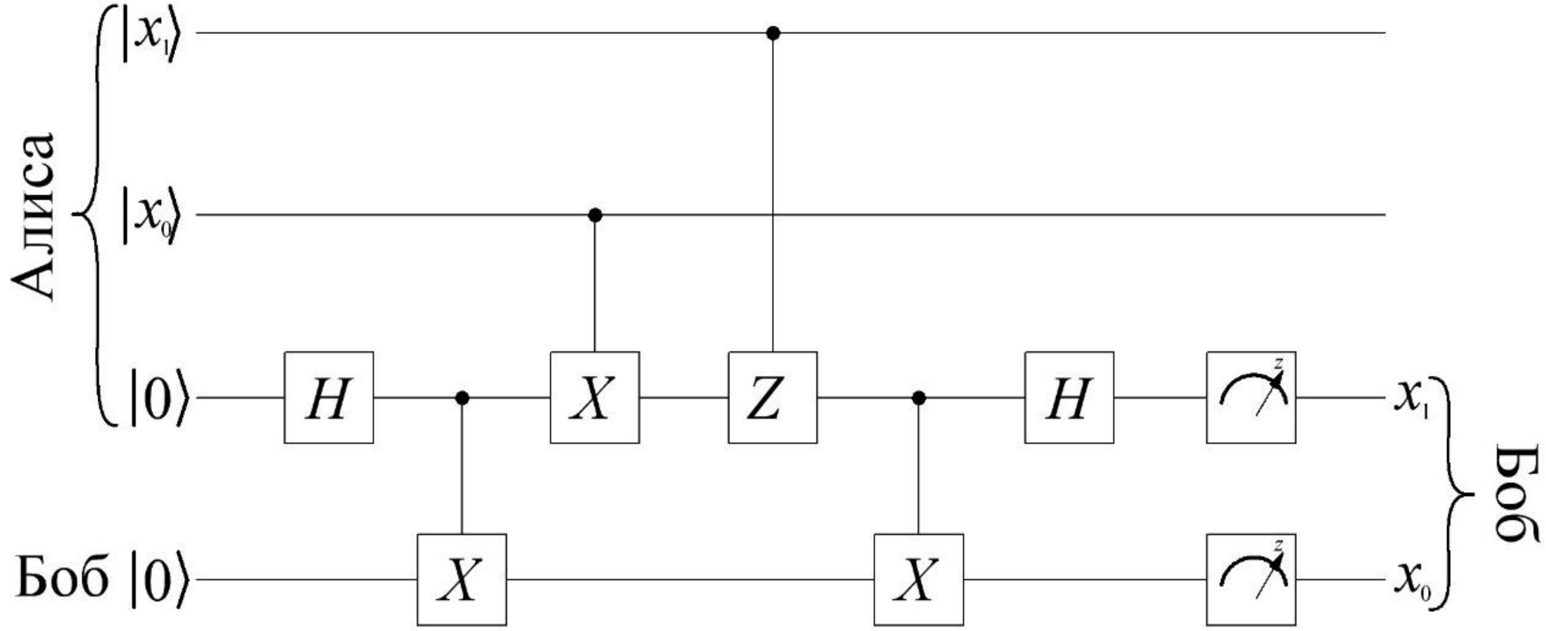
Сверхплотное кодирование

6. Таким образом, выполнив преобразования и измерив два кубита, Боб понимает какую цифру передавала Алиса:

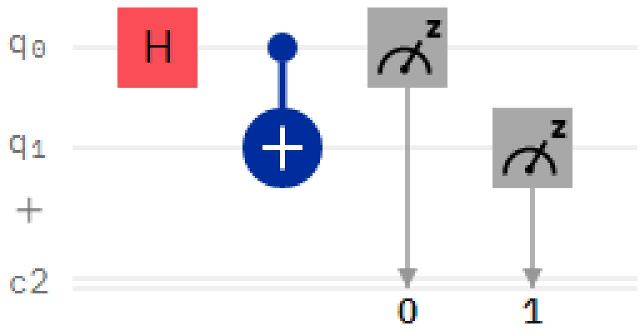
$$\left.\begin{matrix} \textit{Первый кубит} \to |0\rangle \\ \textit{Второй кубит} \to |0\rangle \end{matrix}\right\} \to \textit{цифра } 0 \qquad \left.\begin{matrix} \textit{Первый кубит} \to |0\rangle \\ \textit{Второй кубит} \to |1\rangle \end{matrix}\right\} \to \textit{цифра } 1$$

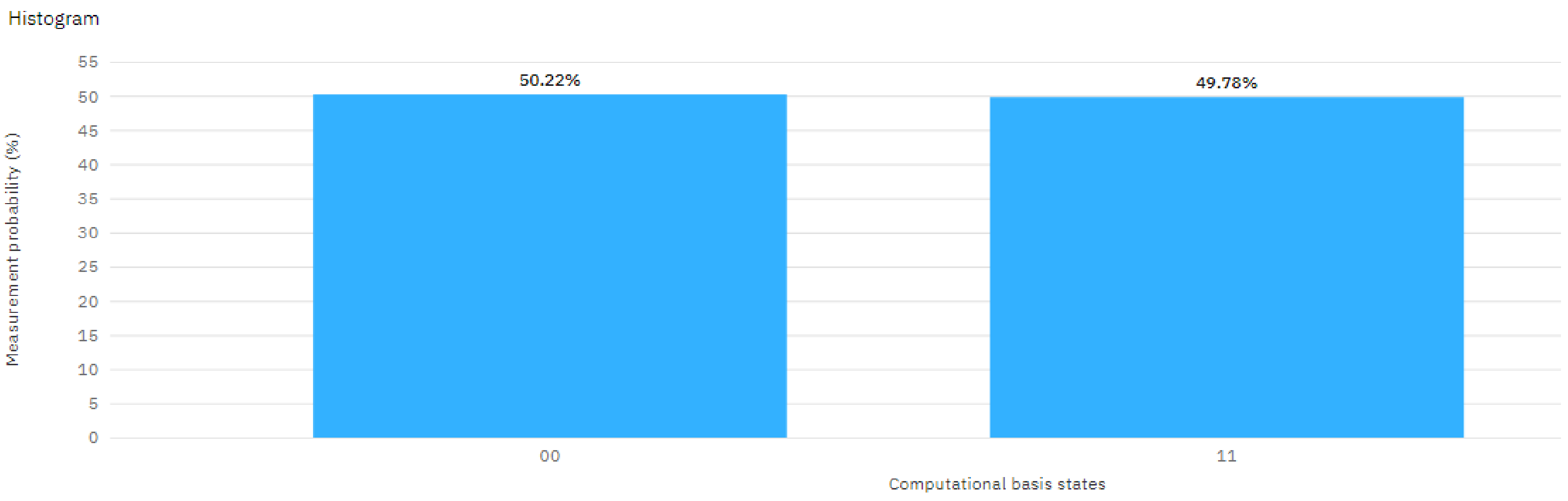
$$\left.\begin{matrix} \textit{Первый кубит} \to |1\rangle \\ \textit{Второй кубит} \to |1\rangle \end{matrix}\right\} \to \textit{цифра } 2 \qquad \left.\begin{matrix} \textit{Первый кубит} \to |1\rangle \\ \textit{Второй кубит} \to |0\rangle \end{matrix}\right\} \to \textit{цифра } 3$$

Сверхплотное кодирование

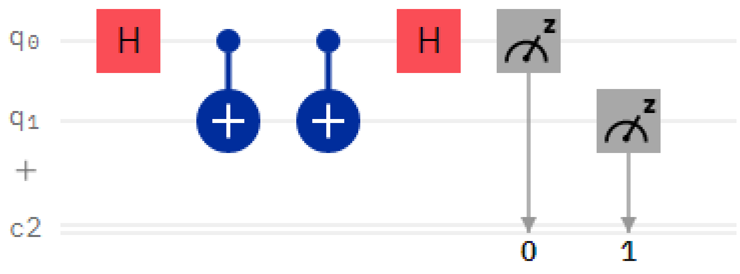


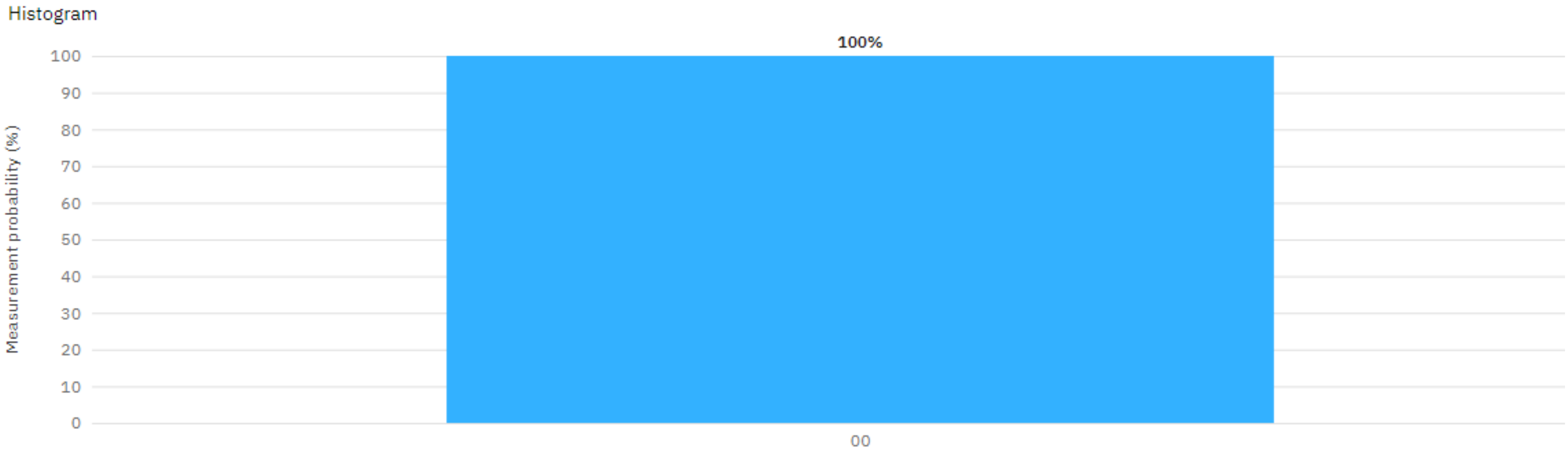
Сверхплотное кодирование



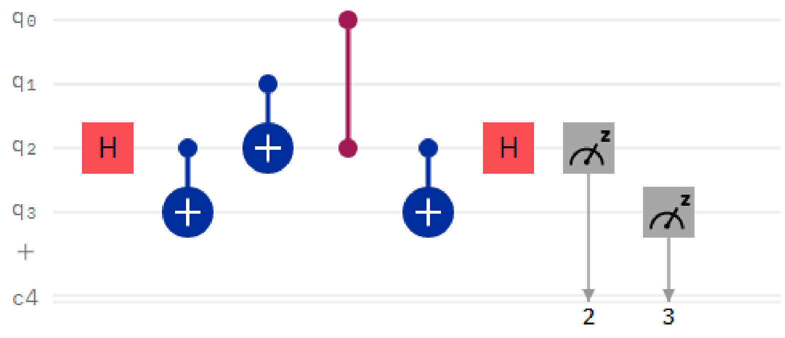


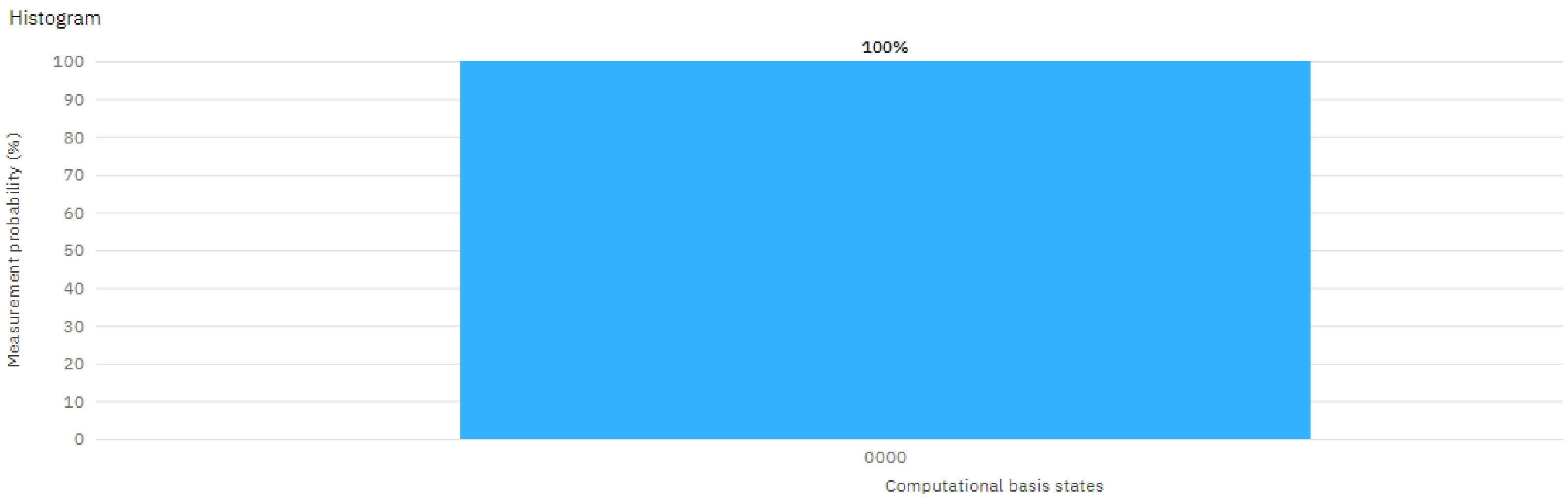
Сверхплотное кодирование



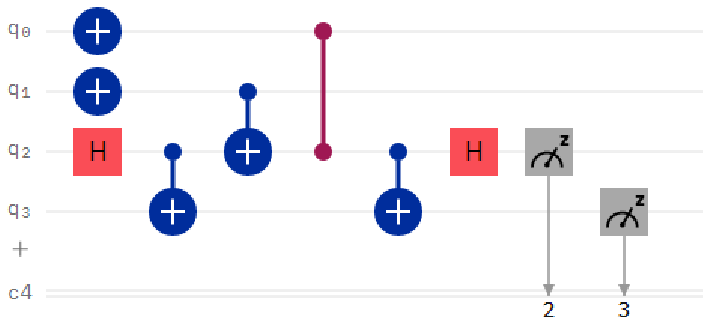


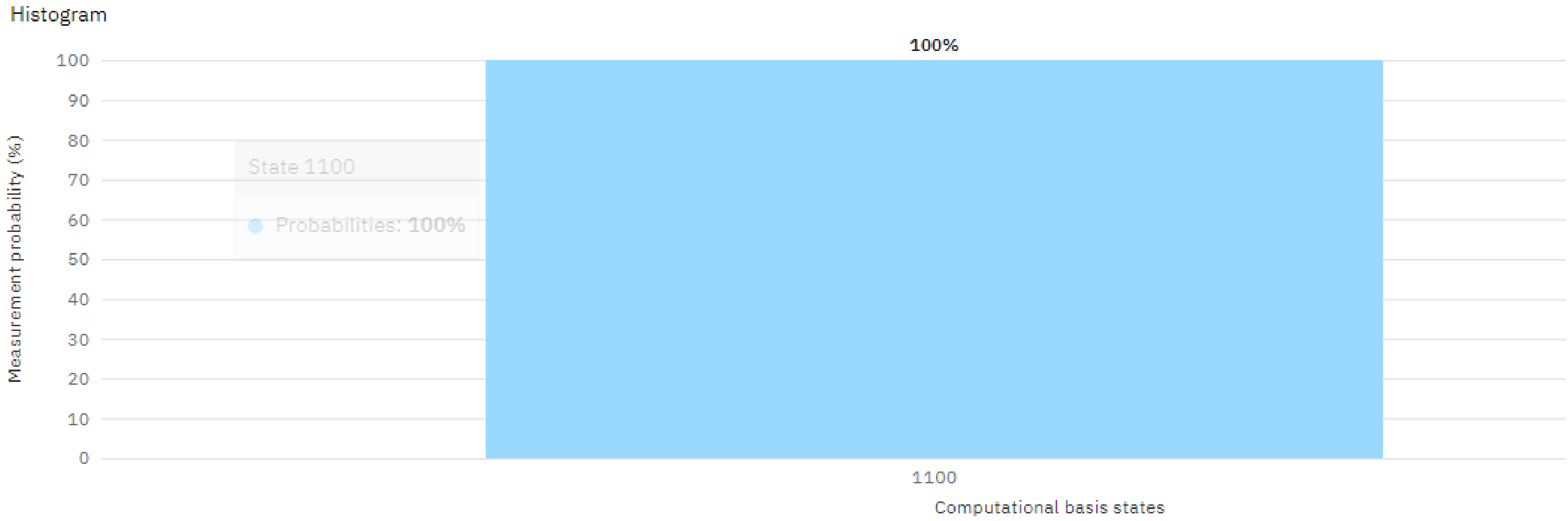
Сверхплотное кодирование





Сверхплотное кодирование





Квантовая телепортация

Рассмотрим пример квантовой телепортации. Допустим Алиса хочет передать Бобу кубит в состоянии суперпозиции. Кубит в данном состоянии находится у Алисы.

$$|\Psi_1\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|\Psi_{23}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

Квантовая телепортация

Распределение кубитов между Бобом и Алисой

$$\left|\Psi_1\right\rangle = \alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle \longrightarrow \textit{Первый бит} - \textit{Алиса}$$

Второй бит – Алиса

$$\left|\psi_{23}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|00\right\rangle + \left|11\right\rangle\right)$$

Третий бит – Боб

Квантовая телепортация

Таким образом можно говорить, что мы имеем трехкубитовую систему

$$|\Psi_1\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \longrightarrow \textit{Первый бит} - \textit{Алиса}$$

Второй бит – Алиса

$$|\psi_{23}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

Третий бит – Боб

$$\Rightarrow \quad |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle\right)$$

Квантовая телепортация

Далее Алиса применяет операцию контролируемой инверсии, причем передаваемый кубит будет являться контролирующим. Тогда трехбитовая система будет иметь вид:

$$\left|\Psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\left|000\right\rangle + \alpha\left|011\right\rangle + \beta\left|100\right\rangle + \beta\left|111\right\rangle\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\Psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\left|000\right\rangle + \alpha\left|011\right\rangle + \beta\left|110\right\rangle + \beta\left|101\right\rangle\right)$$

Квантовая телепортация

После операции ***CNOT*** Алиса выполняет преобразование Адамара с передаваемым кубитом.

$$\left|\Psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\left|000\right\rangle + \alpha\left|011\right\rangle + \beta\left|110\right\rangle + \beta\left|101\right\rangle\right)$$

$$H\left|0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right) \qquad H\left|1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle - \left|1\right\rangle\right)$$

$$\alpha\left|000\right\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\left|000\right\rangle + \alpha\left|100\right\rangle\right) \qquad \alpha\left|011\right\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\left|011\right\rangle + \alpha\left|111\right\rangle\right)$$

$$\beta\left|110\right\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta\left|010\right\rangle - \beta\left|110\right\rangle\right) \qquad \beta\left|101\right\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta\left|001\right\rangle - \beta\left|101\right\rangle\right)$$

Квантовая телепортация

$$\alpha|000\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|000\rangle + \alpha|100\rangle\right) \qquad \alpha|011\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|011\rangle + \alpha|111\rangle\right)$$

$$\beta|110\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta|010\rangle - \beta|110\rangle\right) \qquad \beta|101\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta|001\rangle - \beta|101\rangle\right)$$

$$\Downarrow$$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\alpha|000\rangle + \alpha|100\rangle + \alpha|011\rangle + \alpha|111\rangle + \beta|010\rangle - \beta|110\rangle + \beta|001\rangle - \beta|101\rangle\right)$$

$$\Downarrow$$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle\left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right) + |01\rangle\left(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle\right) + |10\rangle\left(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle\right) + |11\rangle\left(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle\right)\right)$$

Квантовая телепортация

$$\left|\Psi\right\rangle = \frac{1}{2}\Big(\left|00\right\rangle\big(\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle\big) + \left|01\right\rangle\big(\alpha\left|1\right\rangle + \beta\left|0\right\rangle\big) + \left|10\right\rangle\big(\alpha\left|0\right\rangle - \beta\left|1\right\rangle\big) + \left|11\right\rangle\big(\alpha\left|1\right\rangle - \beta\left|0\right\rangle\big)\Big)$$

1. Если кубиты Алисы при измерении принимают значения 00, то в данном случае Бобу не нужно выполнять никаких преобразований и его кубит будет иметь волновую функцию*:*

$$\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle$$

Квантовая телепортация

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\Big(|00\rangle\big(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\big)+|01\rangle\big(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle\big)+|10\rangle\big(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle\big)+|11\rangle\big(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle\big)\Big)$$

2. Если кубиты Алисы при измерении принимают значения 01, то в данном случае кубит, который принадлежит Бобу находится в состоянии*:*

$$\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle$$

$$\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle \xrightarrow{X} \alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$$

Квантовая телепортация

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\Big(|00\rangle\big(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\big) + |01\rangle\big(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle\big) + |10\rangle\big(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle\big) + |11\rangle\big(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle\big)\Big)$$

3. Если кубиты Алисы при измерении принимают значения 10, то в данном случае кубит, который принадлежит Бобу находится в состоянии*:*

$$\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

$$\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle \xrightarrow{Z} \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

Квантовая телепортация

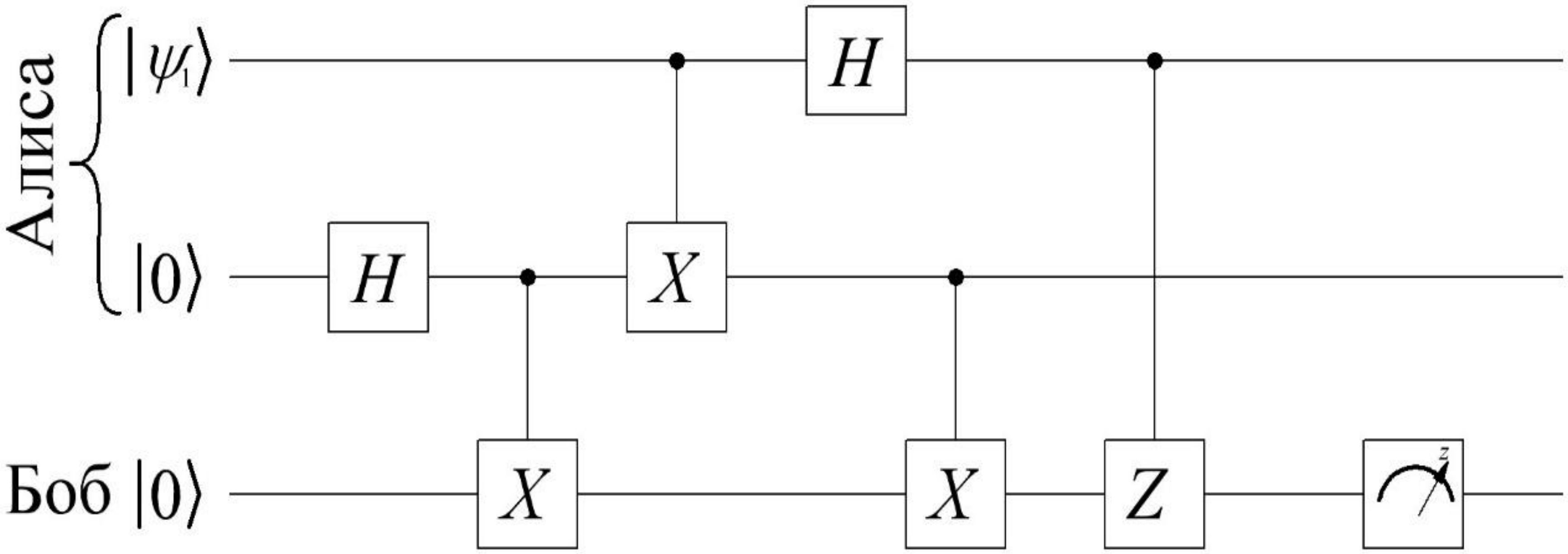
$$\left|\Psi\right\rangle = \frac{1}{2}\Big(\left|00\right\rangle\left(\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle\right) + \left|01\right\rangle\left(\alpha\left|1\right\rangle + \beta\left|0\right\rangle\right) + \left|10\right\rangle\left(\alpha\left|0\right\rangle - \beta\left|1\right\rangle\right) + \left|11\right\rangle\left(\alpha\left|1\right\rangle - \beta\left|0\right\rangle\right)\Big)$$

3. Если кубиты Алисы при измерении принимают значения 11, то в данном случае кубит, который принадлежит Бобу находится в состоянии*:*

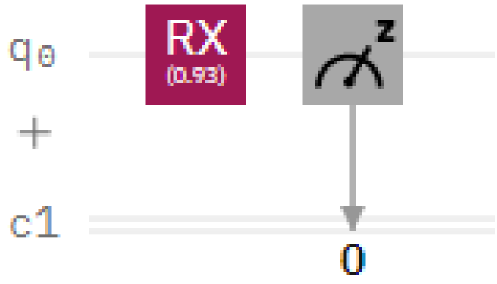
$$\alpha\left|1\right\rangle - \beta\left|0\right\rangle$$

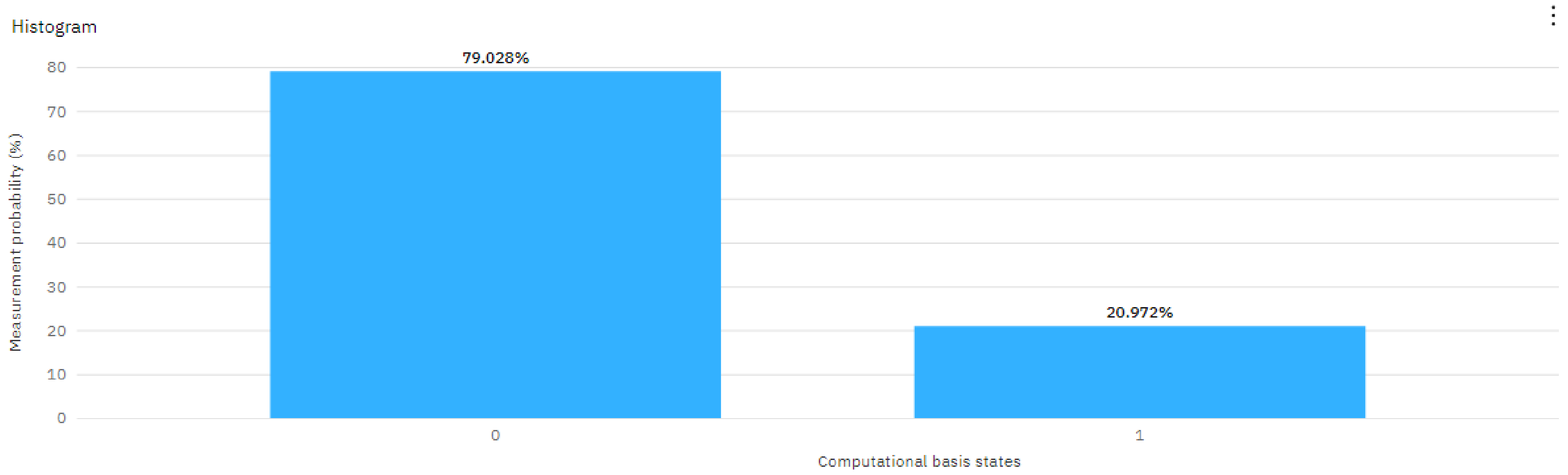
$$\alpha\left|1\right\rangle - \beta\left|0\right\rangle \xrightarrow{X} \alpha\left|0\right\rangle - \beta\left|1\right\rangle \quad \Longrightarrow \quad \alpha\left|0\right\rangle - \beta\left|1\right\rangle \xrightarrow{Z} \alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle$$

Квантовая телепортация

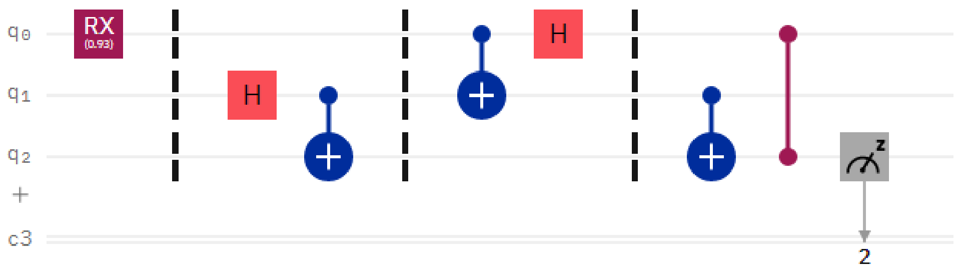


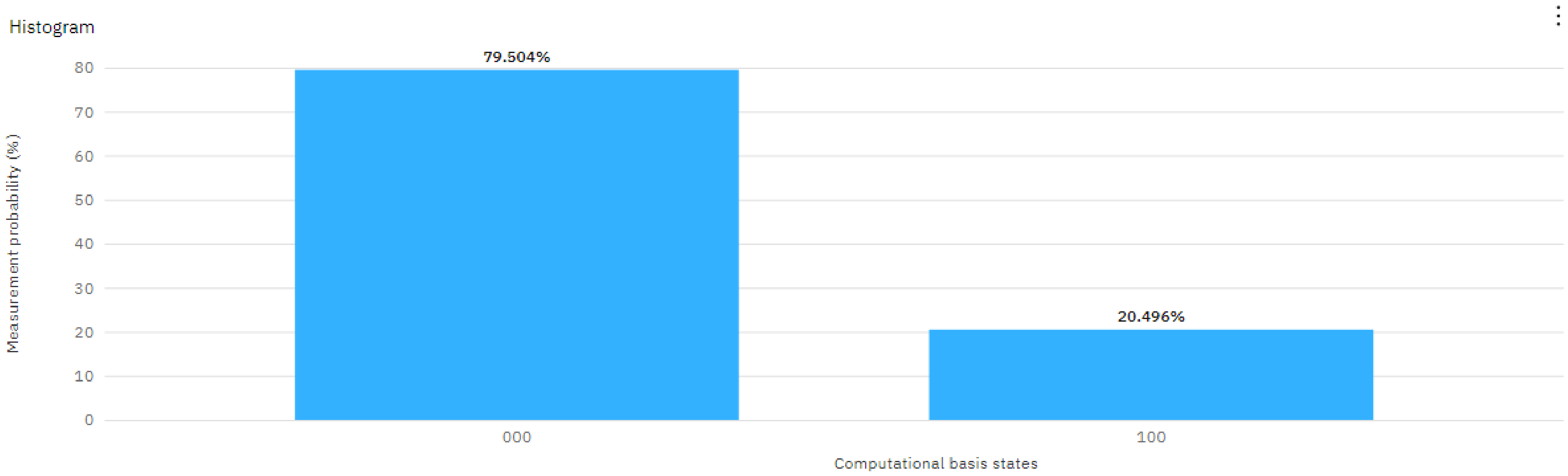
Квантовая телепортация





Квантовая телепортация





Спасибо за внимание!