



Всероссийская научно-образовательная школа
"Квантовый скачок"



КВАНТОВАЯ ЕДИНИЦА ИНФОРМАЦИИ: ОТ БИТА К КУБИТУ

Торгаев С.Н.
Квантовый центр ТГУ
qtcenter.tsu.ru
Контакты:
+7 923 403 17 94
torgaev@mail.tsu.ru

Содержание



Введение



Квантовая система



Понятие кубита



Измерение квантовой системы



Введение



В классических компьютерах единицей хранения информации является **БИТ**
Бит может принимать два значения – **0** и **1**.

Примеры представления чисел в двоичной системе:

0 – 0

1 – 1

0 – 00

1 – 01

2 – 10

3 – 11

0 – 000

1 – 001

2 – 010

3 – 011

4 – 100

5 – 101

6 – 110

7 – 111

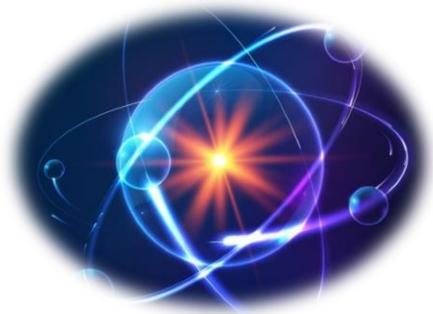


Введение



Любая более сложная логическая операция – это определённая **комбинация** базовых **побитовых операций**.

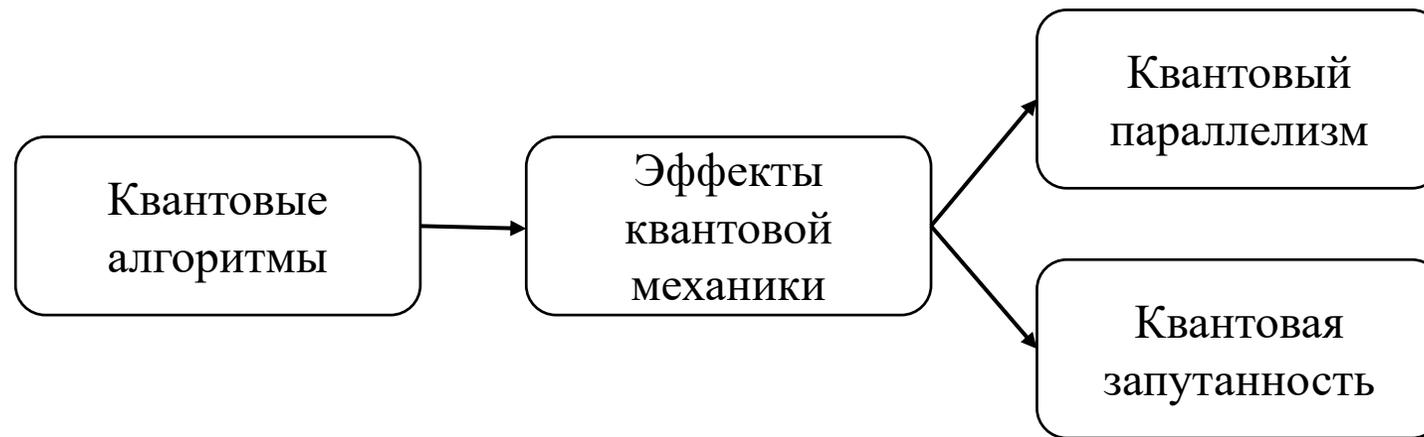
Именно так работает обычный компьютер на самом базовом уровне.



Понятие кубита



Квантовый компьютер – это средство вычислительной техники в основе которого лежат законы квантовой механики.



Квантовый компьютер оперирует, так называемыми *квантовыми битами*.

↓
кубитами
↓
q-битами



Понятие кубита



Квантовый бит – квантово-механическая система, имеющая два состояния.

$$|0\rangle \text{ и } |1\rangle$$

Эти два состояния могут находиться в *состоянии суперпозиции!*

Математическое определение термина «*квантовый бит*» - это вектор единичной длины в двумерном гильбертовом пространстве над полем комплексных чисел.



Понятие кубита



Наиболее общее состояние квантового бита может быть записано как:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

α и β – комплексные коэффициенты

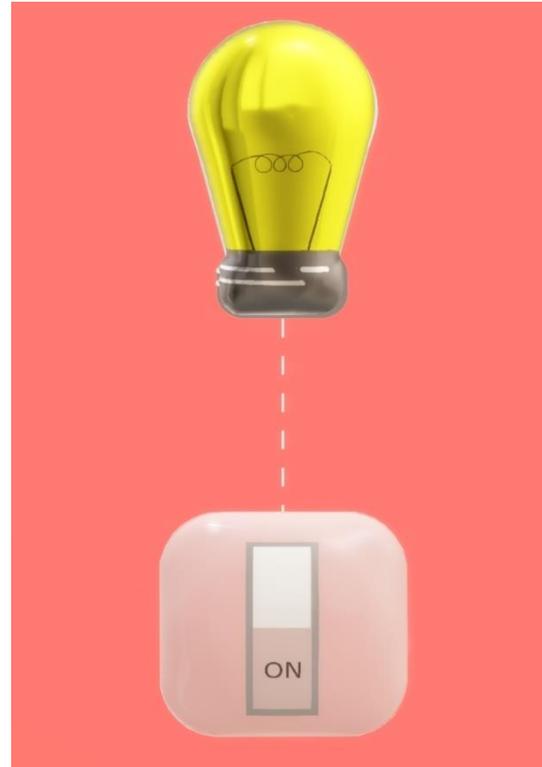
Состояния суперпозиции представляют собой значения между экстремумами 0 и 1, а квантовый бит может принимать бесконечно много значений.



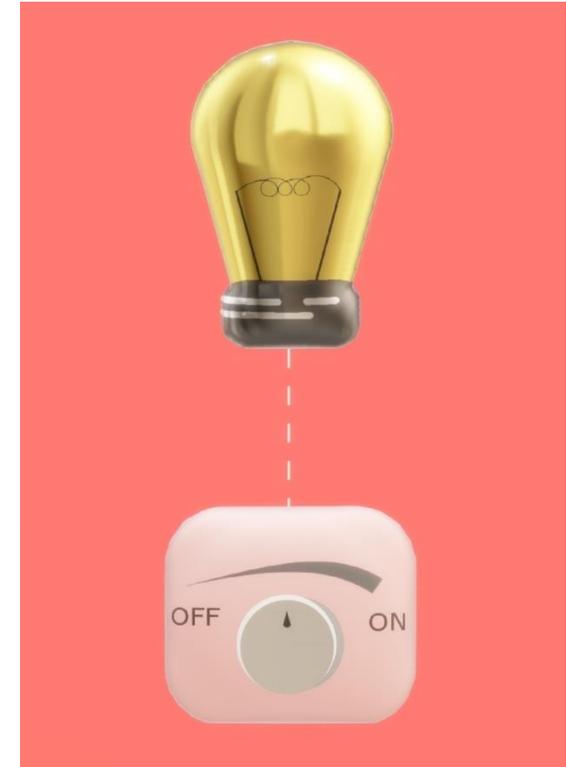
Понятие кубита



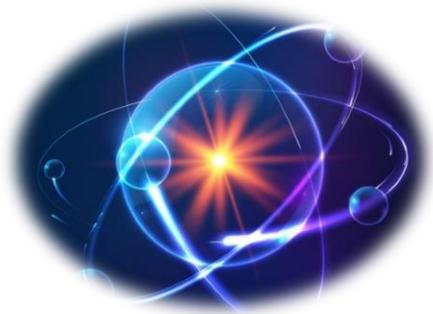
Бит 0



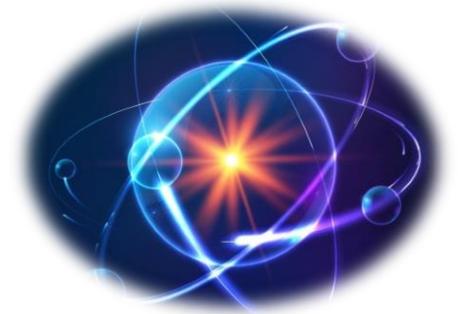
Бит 1



Кубит



Понятие кубита



$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

При измерении состояния системы:

- вероятность обнаружить ее в состоянии $|0\rangle$ равна α^2
- вероятность обнаружить ее в состоянии $|1\rangle$ равна β^2

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

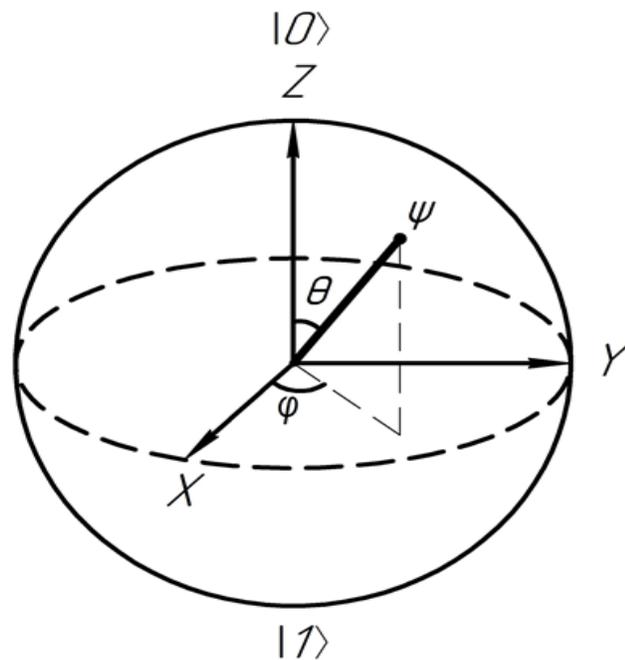
Данное соотношение называется **условием нормализации**.

Формула для волновой функции описывает, в какой пропорции бесконечное множество всех вариантов значений квантового состояния содержит варианты базисных состояний:

$$|0\rangle \text{ и } |1\rangle$$



Понятие кубита



Сфера Блоха - это сфера с единичным радиусом, при этом точка на ее поверхности соответствует состоянию кубита

Физические реализации подобной системы с двумя состояниями могут быть разнообразными:

- электрон или ядро со спином $1/2$, ориентированным по или против направления магнитного поля;
- атом с двумя различными энергетическими состояниями;
- фотон с горизонтальной или вертикальной поляризацией;
- и т.д.



Понятие кубита



Для квантовых вычислений как правило требуется **больше одного кубита**. Система, состоящая из нескольких кубитов, представляет собой тензорное произведение составляющих ее систем.

$$|q_1\rangle \dots |q_n\rangle = (\alpha_0|0\rangle + \beta_0|1\rangle) \otimes (\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle) \otimes \dots \otimes (\alpha_{n-1}|0\rangle + \beta_{n-1}|1\rangle)$$

Например, система двух кубитов:

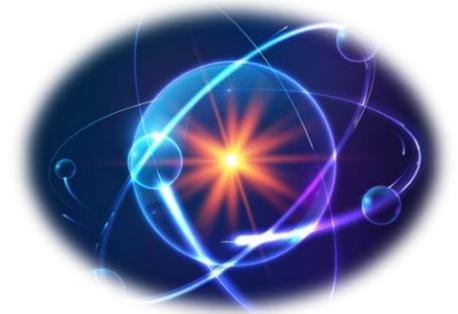
$$|\psi\rangle = (\alpha_0|0\rangle + \beta_0|1\rangle) \otimes (\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle) = \alpha_0\alpha_1|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \beta_0\alpha_1|10\rangle + \beta_0\beta_1|11\rangle$$

При этом сумма вероятностей:

$$|\alpha_0\alpha_1|^2 + |\alpha_0\beta_1|^2 + |\beta_0\alpha_1|^2 + |\beta_0\beta_1|^2 = 1$$



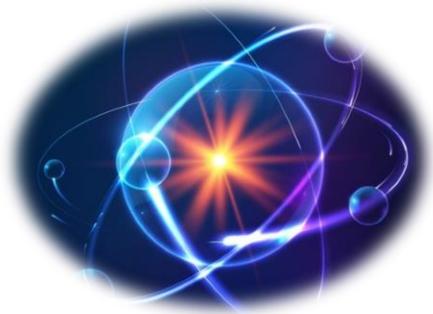
Понятие кубита



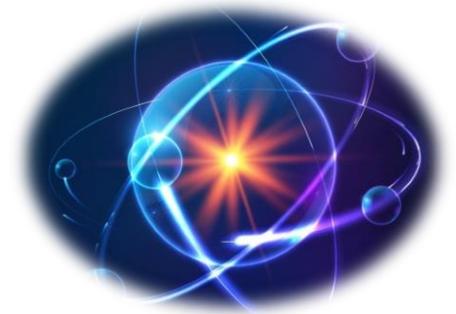
$$|\Psi\rangle = \alpha_0|00\rangle + \alpha_1|01\rangle + \alpha_2|10\rangle + \alpha_3|11\rangle$$

- $|00\rangle$ – оба кубита при измерении дают результат 0.
- $|01\rangle$ – кубит №1 при измерении даёт 0, кубит №2 даёт 1.
- $|10\rangle$ – кубит №1 при измерении даёт 1, кубит №2 даёт 0.
- $|11\rangle$ – оба кубита при измерении дают результат 1.

$$|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 = 1$$



Квантовая система



n-кубитная система:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=0}^{2^n-1} \alpha_k |k\rangle$$

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} |\alpha_k|^2 = 1$$

Когда мы будем выполнять измерение состояния такого кубита, то получим одно из классических значений совокупности n битов от **000...0** до **111...1**

Следует отметить, что для каких-то состояний вероятность может оказаться нулевой!



Измерение квантовой системы



Чтобы получить информацию о состоянии квантовой системы необходимо выполнить его измерение. Для проведения измерений мы должны активно воздействовать на квантовую систему. В процессе измерения мы получим один из векторов этого базиса. Сразу же после измерения состояние квантовой системы разрушается и то есть система переходит в состояние, соответствующее наблюдаемому значению.

Для однокубитной системы:

- Состоянии $|0\rangle$ – при измерении получим тоже $|0\rangle$.
- Состоянии $|1\rangle$ – при измерении получим тоже $|1\rangle$.
- Состояние суперпозиции – при измерения получим вектор $|0\rangle$ с вероятностью $|\alpha|^2$, а вектор $|1\rangle$, с вероятностью $|\beta|^2$.

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

В результате измерений невозможно определить значения α и β , а также невозможно измерить повторно ту же самую систему, потому что, после измерения состояние квантовой системы разрушается.



Измерение квантовой системы



В общем случае, вероятностный процесс измерения квантовой системы происходит следующим образом:

1. Пусть у нас имеется квантовое состояние системы из n кубитов и стандартный базис пространства состояний системы:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=0}^{2^n-1} \alpha_k |k\rangle \quad k = \{|0\rangle, \dots, |2^n - 1\rangle\}$$

2. При измерении состояния системы по отношению к базису k с вероятностью $|\alpha_i|^2$ результат измерения будет - $|i\rangle$

3. После измерения квантовая система будет находиться в состоянии - $|i\rangle$

4. После измерений амплитуды состояний отличных от $|i\rangle$ будут равны нулю:

$$\alpha_k = 0 \quad k \neq i$$



Измерение квантовой системы



$$|\Psi\rangle = \alpha_0|00\rangle + \alpha_1|01\rangle + \alpha_2|10\rangle + \alpha_3|11\rangle$$

$$\alpha_0 = 0.3$$

$$\alpha_1 = 0.1$$

$$\alpha_2 = 0.9$$

$$\alpha_3 = 0.3$$

- С вероятностью 0.09 получится значение «00» и 2-кубит перейдет в состояние $|00\rangle$.
- С вероятностью 0.01 получится значение «01» и 2-кубит перейдет в состояние $|01\rangle$.
- С вероятностью 0.81 получится значение «10» и 2-кубит перейдет в состояние $|10\rangle$.
- С вероятностью 0.09 получится значение «11» и 2-кубит перейдет в состояние $|11\rangle$.



Измерение квантовой системы



$$|\Psi\rangle = \alpha_0|000\rangle + \alpha_1|001\rangle + \alpha_2|010\rangle + \alpha_3|011\rangle + \alpha_5|101\rangle + \alpha_6|110\rangle$$

$$\alpha_0 = 0.3$$

$$\alpha_1 = -0.6$$

$$\alpha_2 = -0.1$$

$$\alpha_3 = -0.7$$

$$\alpha_5 = 0.1$$

$$\alpha_6 = -0.2$$

В заданном нами примере отсутствуют состояния $|100\rangle$ и $|111\rangle$, то есть их коэффициенты α_4 и α_7 равны 0.



Измерение квантовой системы



$$|\Psi\rangle = \alpha_0|000\rangle + \alpha_1|001\rangle + \alpha_2|010\rangle + \alpha_3|011\rangle + \alpha_5|101\rangle + \alpha_6|110\rangle$$

$$\alpha_0 = 0.3$$

$$\alpha_1 = -0.6$$

$$\alpha_2 = -0.1$$

$$\alpha_3 = -0.7$$

$$\alpha_5 = 0.1$$

$$\alpha_6 = -0.2$$

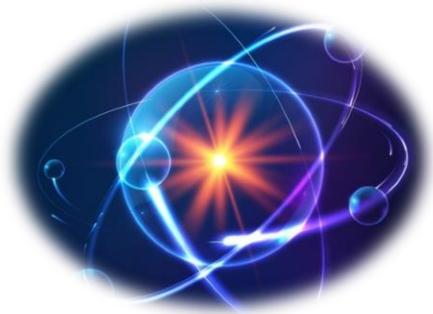
Вероятность наблюдения значения «00»

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = 0.09 + 0.36 = 0.45$$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2}} (\alpha_0|000\rangle + \alpha_1|001\rangle)$$

$$\alpha_0 = 0.3$$

$$\alpha_1 = -0.6$$



Измерение квантовой системы



$$|\Psi\rangle = \alpha_0|000\rangle + \alpha_1|001\rangle + \alpha_2|010\rangle + \alpha_3|011\rangle + \alpha_5|101\rangle + \alpha_6|110\rangle$$

$$\alpha_0 = 0.3$$

$$\alpha_1 = -0.6$$

$$\alpha_2 = -0.1$$

$$\alpha_3 = -0.7$$

$$\alpha_5 = 0.1$$

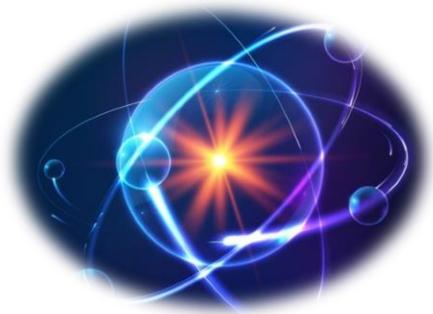
$$\alpha_6 = -0.2$$

$$\alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0.01 + 0.49 = 0.5$$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} (\alpha_2|010\rangle + \alpha_3|011\rangle)$$

$$\alpha_2 = -0.1$$

$$\alpha_3 = -0.7$$



Измерение квантовой системы



$$|\Psi\rangle = \alpha_0|000\rangle + \alpha_1|001\rangle + \alpha_2|010\rangle + \alpha_3|011\rangle + \alpha_5|101\rangle + \alpha_6|110\rangle$$

$$\alpha_0 = 0.3$$

$$\alpha_1 = -0.6$$

$$\alpha_2 = -0.1$$

$$\alpha_3 = -0.7$$

$$\alpha_5 = 0.1$$

$$\alpha_6 = -0.2$$

Вероятность наблюдения значения «10»

$$\alpha_5^2 = 0.01$$

$$|\Psi\rangle = |101\rangle$$

Вероятность наблюдения значения «11»

$$\alpha_6^2 = 0.04$$

$$|\Psi\rangle = |110\rangle$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Квантовый центр ТГУ
qtcenter.tsu.ru